

# **Reporte de Investigación - Verano Delfín**

Cristóbal Pérez González

2026-06-12

# Tabla de contenidos

<b>Prefacio</b>	<b>4</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>5</b>
<b>I Marco Teórico y Normativa</b>	<b>6</b>
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>7</b>
2.1 Procesos Estocásticos . . . . .	7
2.1.1 Movimiento Browniano (Proceso de Wiener) . . . . .	8
2.1.2 Procesos de Poisson . . . . .	8
2.1.3 Cadenas de Markov a Tiempo Continuo . . . . .	10
2.2 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y la Integral de Itô . . . . .	12
2.3 El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico . . . . .	14
2.4 Formulación de la Ecuación Diferencial Estocástica General . . . . .	15
2.5 El Modelo Estocástico de Red de Frío (Ornstein-Uhlenbeck Modificado) . . . . .	15
2.6 El Lema de Itô Clásico y Generalizado . . . . .	17
2.7 Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas . . . . .	19
2.7.1 Esquema Numérico de Euler-Maruyama . . . . .	20
2.7.2 Esquema Numérico de Milstein . . . . .	21
2.8 Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte . . . . .	22
<b>II Modelo Matemático</b>	<b>25</b>
<b>3 Estudio de Caso: Calibración de Parámetros y Fallas Eléctricas</b>	<b>26</b>
3.1 Motivación y Contexto del Estudio . . . . .	26
3.2 Datos Base (CFE) . . . . .	26
3.3 Corrección de Escala Espacial (Factor $\kappa_{espacial}$ ) . . . . .	27
3.3.1 Justificación de la Reducción de Escala . . . . .	27
3.3.2 La Esperanza Matemática Local . . . . .	27
3.4 Distribución Temporal: El Indicador SAIFI 2024 . . . . .	28
3.5 Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH) . . . . .	28
3.6 Validación del Modelo (Cálculo Integral) . . . . .	29
3.7 Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) . . . . .	30
3.7.1 Régimen 1: Operación Normal ( $\alpha(t) = 1$ ) . . . . .	31

3.7.2	Régimen 2: Falla Eléctrica ( $\alpha(t) = 2$ ) . . . . .	31
3.7.3	Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ( $N_{puerta}(t)$ ) . . . . .	31
<b>III</b>	<b>Simulación de Equipos (Haier HBC-150)</b>	<b>32</b>
	<b>Referencias</b>	<b>35</b>

# Prefacio

# 1 Introducción

**Parte I**

**Marco Teórico y Normativa**

## 2 Fundamentos Teóricos

En este capítulo se presentarán las bases conceptuales y el marco formal del cálculo estocástico que fundamentan el desarrollo de nuestro modelo matemático para la red de frío. Se definirán en primer lugar los procesos estocásticos elementales para, posteriormente, construir la ecuación diferencial estocástica (EDE) híbrida que rige el sistema.

### 2.1. Procesos Estocásticos

El modelado térmico de un refrigerador de vacunas expuesto a incertidumbres continuas y perturbaciones discretas requiere herramientas más allá del cálculo determinista. Desde una perspectiva analítica, un proceso estocástico representa la generalización de una variable aleatoria indexada en un conjunto ordenado, parametrizando la evolución de un sistema bajo incertidumbre.

**Definición 2.1** (Proceso Estocástico). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d$  un espacio muestral dotado de su respectiva  $\sigma$ -álgebra de Borel. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  parametrizadas por  $t \in \mathcal{T}$ , donde  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ .

Dependiendo de como es el conjunto de índices  $\mathcal{T}$ , los procesos estocásticos se clasifican en dos:

1. **Procesos estocásticos a tiempo discreto:** Si  $\mathcal{T}$  es numerable, por lo general  $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  o  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ , decimos que el proceso estocástico es a tiempo discreto. En este escenario, el sistema evoluciona mediante transiciones discretas en pasos fijos discretizados.
2. **Procesos estocásticos a tiempo continuo:** Si  $\mathcal{T}$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , por lo general  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  o un intervalo acotado  $\mathcal{T} = [0, T]$ ,  $T > 0$ , se dice que el proceso estocástico es a tiempo continuo. Esta estructura es la adecuada para modelar fenómenos físicos continuos, como la transferencia térmica.

Para enlazar la teoría probabilística con la observación empírica de un fenómeno estocástico, es indispensable establecer la distinción entre el espacio funcional del proceso y sus realizaciones particulares.

**Definición 2.2** (Trayectorias del Proceso Estocástico). Si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico a tiempo continuo, para cada  $\omega \in \Omega$  fijo y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ , se definen las trayectorias del proceso como:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= [0, \infty) \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R} \\ t &\rightarrow X_t(\omega).\end{aligned}$$

Las propiedades analíticas de un proceso estocástico, tales como la continuidad, la diferenciabilidad y la presencia de discontinuidades finitas, se definen estrictamente a partir del comportamiento de varias componentes, para más detalles consultar (Karlin y Taylor 1998). Los componentes aleatorios de nuestro sistema se sustentan en tres procesos estocásticos específicos a tiempo continuo.

### 2.1.1. Movimiento Browniano (Proceso de Wiener)

Para representar las fluctuaciones térmicas continuas de baja intensidad asociadas al ruido intrínseco del termostato y microtransferencias de calor se utiliza el movimiento Browniano.

**Definición 2.3** (Proceso de Wiener). Un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  definido sobre un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  es un movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener si cumple con las siguientes propiedades:

1.  $W(0) = 0$  con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias  $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios gaussianos, es decir, para todo  $t > s \geq 0$ ,  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

El término  $dW(t) = W(t + dt) - W(t)$  representa el diferencial del proceso de Wiener. Este denota una perturbación gaussiana elemental en un intervalo infinitesimal  $dt$ , caracterizada por una media  $\mathbb{E}[dW(t)] = 0$  y una varianza  $\mathbb{E}[(dW(t))^2] = dt$ . Para una revisión detallada sobre las propiedades de medida y construcciones analíticas de este proceso, se sugiere consultar a (Karatzas y Shreve 1998).

### 2.1.2. Procesos de Poisson

Las aperturas de las puertas del refrigerador por el personal médico constituyen eventos discretos y repentinos que alteran instantáneamente la temperatura interna. Este tipo de fenómenos se modela mediante un proceso estocástico a tiempo continuo de saltos puros.

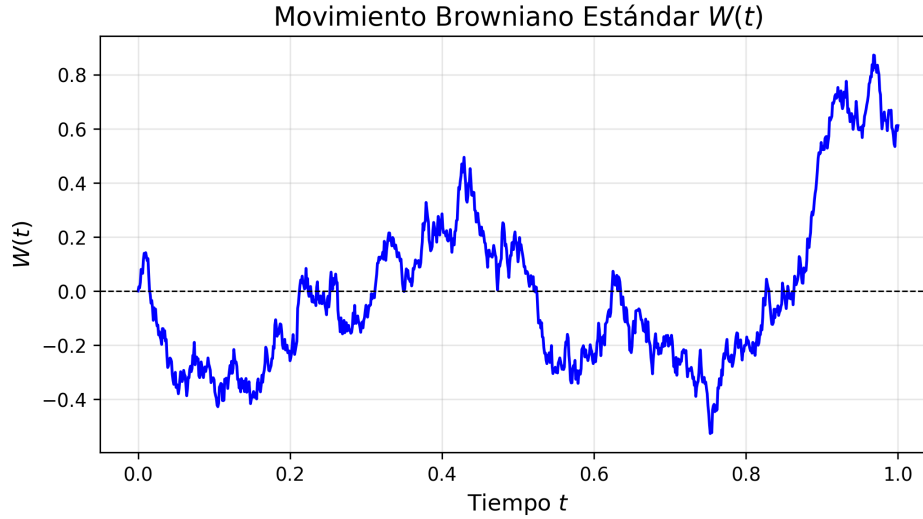


Figura 2.1: Trayectoria simulada del proceso de Wiener. El eje horizontal representa el avance del tiempo continuo en un horizonte parametrizado de  $T = 1.0$  con incrementos de  $dt = 0.001$ . El eje vertical denota la posición de las fluctuaciones aleatorias  $W(t)$ , iniciando en el origen  $W(0) = 0$ .

**Definición 2.4** (Proceso de Poisson Homogéneo). Un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  que toma valores enteros en el espacio de estados  $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$  es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro de intensidad constante  $\lambda > 0$  si satisface las siguientes condiciones:

1.  $N(0) = 0$  con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias discretas  $N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$  son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios; lo que implica que la ley de probabilidad de cualquier incremento  $N(t + s) - N(s)$  depende únicamente de la amplitud temporal  $t$  y resulta invariante ante traslaciones sobre el origen cronológico  $s$ . De forma explícita, la variable aleatoria  $N(t)$  sigue una distribución de Poisson con parámetro o tasa media dada por el producto  $\lambda t$ , es decir:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para formalizar analíticamente el comportamiento probabilístico de los saltos sin recurrir a nociones intuitivas, las probabilidades de transición asociadas al incremento del proceso en un intervalo acotado de longitud  $h > 0$  se especifican rigurosamente mediante el límite asintótico cuando  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= o(h)\end{aligned}$$

donde la notación algebraico-asintótica de Landau  $o(h)$  denota una función de orden superior tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ . Esto garantiza formalmente que la probabilidad de ocurrencia de múltiples eventos simultáneos en una fracción temporal infinitesimal es prácticamente nula.

Sin embargo, en la dinámica real de un centro de salud, la tasa de aperturas del refrigerador no es constante; exhibe una estacionalidad diaria (por ejemplo, mayor actividad en horas pico). Para capturar esta variabilidad, generalizamos el modelo relajando la propiedad de incrementos estacionarios.

**Definición 2.5** (Proceso de Poisson No Homogéneo). Un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t) \geq 0$  (para  $t \geq 0$ ) si satisface las siguientes condiciones:

1.  $N(0) = 0$  con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes.
3. Para todo  $t \geq 0$  y  $h > 0$ , la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo  $(t, t+h]$  está dada por la tasa instantánea en el tiempo  $t$ :

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

4. La probabilidad de observar dos o más eventos en dicho intervalo es de orden superior a  $h$ :

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

Una exposición rigurosa sobre los procesos de conteo, sus generalizaciones no homogéneas y sus aplicaciones en sistemas con discontinuidades puede encontrarse en [\(Ross 1996\)](#).

### 2.1.3. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo

Los fallos prolongados en el suministro eléctrico de la red pública alteran estructuralmente la dinámica del sistema. Para modelar estas transiciones entre estados macroscópicos del entorno, introducimos una cadena de Markov en tiempo continuo.

**Definición 2.6** (Cadena de Markov a Tiempo Continuo). Sea  $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico que toma valores en un espacio de estados finito y discreto  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ . Se dice que  $\alpha(t)$  es una cadena de Markov en tiempo continuo si para todo  $s, t \geq 0$  y estados  $i, j \in \mathcal{M}$ , cumple la propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i, \alpha(u) = \alpha_u, 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i)$$

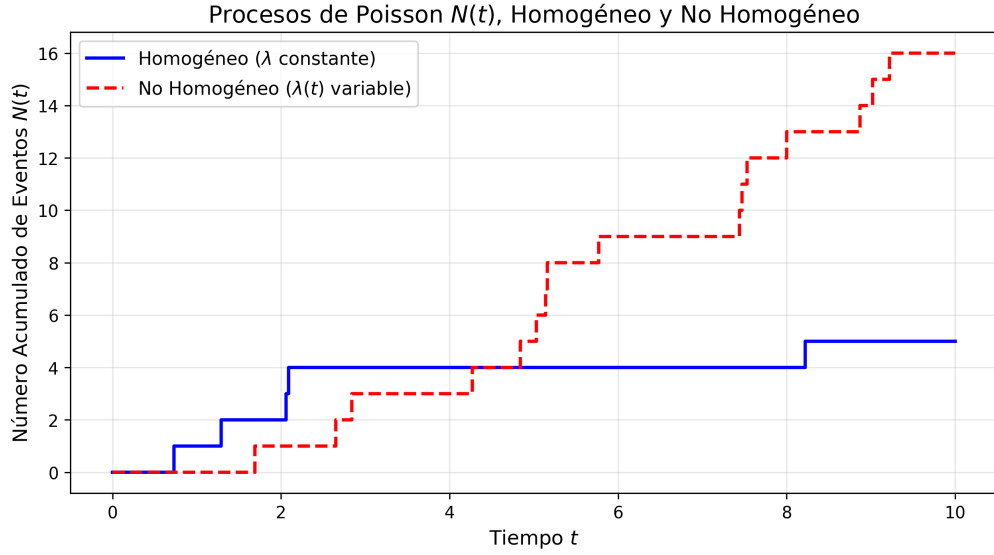


Figura 2.2: Trayectorias simuladas de dos procesos de Poisson. El eje horizontal representa el tiempo de observación en un horizonte de  $T = 10.0$  con incrementos discretos de  $dt = 0.01$ . El eje vertical contabiliza el número acumulado de eventos discretos  $N(t)$ , iniciando en  $N(0) = 0$ . La línea continua (azul) ilustra un Proceso de Poisson Homogéneo con una tasa de intensidad constante  $\lambda = 1$ , evidenciando incrementos estacionarios, por otro lado la línea punteada (roja) representa un Proceso de Poisson No Homogéneo con una intensidad de  $\lambda(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ , es decir es dependiente del tiempo, concentrando una mayor densidad de saltos en el periodo central del intervalo (simulando, por ejemplo, las horas pico de aperturas del refrigerador durante una jornada clínica). Ambas gráficas exhiben la naturaleza escalonada continua por la derecha con límites por la izquierda, por sus siglas en francés (càdlàg), propia de los procesos de saltos puros.

Las leyes de transición y la evolución temporal de las probabilidades de estado de la cadena  $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$  se encuentran completamente caracterizadas por la matriz de intensidades de transición  $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Si definimos las funciones de probabilidad de transición condicional mediante  $p_{ij}(h) = \mathbb{P}(\alpha(t+h) = j \mid \alpha(t) = i)$  para un incremento temporal positivo  $h > 0$ , las componentes de la matriz  $Q$  se determinan evaluando el límite analítico en el origen:

1. Para transiciones entre estados distintos ( $i \neq j$ ), la componente  $q_{ij}$  representa la tasa instantánea o intensidad de conmutación desde el régimen  $i$  hacia el régimen  $j$ , definida como:

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0$$

2. Para los elementos situados sobre la diagonal principal ( $i = j$ ), la componente  $q_{ii}$  representa la tasa neta de salida del estado  $i$ , cumpliendo por conservación de la probabilidad que la suma por filas de la matriz  $Q$  sea idénticamente nula:

$$q_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

A través de esta formulación basada en límites, las probabilidades de transición de primer orden quedan descritas mediante las expresiones  $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$  para  $i \neq j$ , y  $p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$ . Esto permite modelar las conmutaciones macroscópicas de la dinámica del refrigerador sin necesidad de introducir variables temporales discretas ni heurísticas. Los lectores interesados en profundizar en las propiedades asintóticas y de estabilidad de estos procesos híbridos pueden remitirse al texto especializado de ([Asmussen 2003](#)).

## 2.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y la Integral de Itô

Una vez establecidos los procesos estocásticos de soporte, es necesario definir las reglas operacionales que permiten construir y resolver ecuaciones sujetas a perturbaciones aleatorias continuas. Dado que las trayectorias del movimiento Browniano no son de variación acotada y tampoco son diferenciables en ningún punto, entonces la expresión clásica  $dW(t)/dt$  no tiene sentido dentro del cálculo ordinario. Por lo tanto, la integración respecto a procesos estocásticos requiere la construcción de una nueva herramienta analítica conocida como la integral de Itô.

**Definición 2.7** (Integral de Itô). Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico adaptado a la filtración Browniana  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  que satisface la condición de integrabilidad, i.e.  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T X^2(t) dt \right] < \infty$ . La integral de Itô de  $X(t)$  respecto al proceso de Wiener  $W(t)$  se define como el límite en media cuadrática de sumas de Riemann aproximadas por la izquierda:

$$\int_0^T X(t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad \text{en } L^2$$

donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  es una partición del intervalo  $[0, T]$  cuyo diámetro tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

A diferencia del cálculo clásico, evaluar el integrando estrictamente en el extremo izquierdo de cada subintervalo ( $t_i$ ) garantiza que la integral resultante conserve la propiedad de martingala, lo que implica que su esperanza matemática es nula, i.e.  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T X(t)dW(t) \right] = 0$ . A partir de este concepto fundamental, se establece la formulación de una Ecuación Diferencial Estocástica (EDE).

**Definición 2.8** (Ecuación Diferencial Estocástica). Una ecuación diferencial estocástica para un proceso  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  es una relación simbólica expresada en su forma diferencial mediante:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (2.1)$$

donde  $b(t, X(t))$  denota el coeficiente de deriva y  $\sigma(t, X(t))$  representa el coeficiente de difusión.

El término  $dX(t)$  en la Ecuación 2.1 no debe interpretarse como una derivada ordinaria, sino como una representación abreviada de su ecuación integral equivalente:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (2.2)$$

En la Ecuación 2.2, la primera integral respecto al tiempo es una integral ordinaria de Lebesgue-Stieltjes que captura la tendencia determinista del sistema, mientras que la segunda es una integral de Itô que modela el ruido estocástico continuo. Para una revisión rigurosa del cálculo estocástico elemental, se sugiere consultar a ([Karatzas y Shreve 1998](#)).

Para asegurar que una EDE posea una solución única ante cualquier condición inicial, los coeficientes de deriva y difusión deben cumplir ciertas condiciones, expuestas en el siguiente teorema de existencia y unicidad.

**Teorema 2.1** (Teorema de Existencia y Unicidad). *Sea la EDE definida en la Ecuación 2.1 con una condición inicial  $X(0) = X_0$  independiente del proceso de Wiener. Supóngase que para todo  $t \in [0, T]$  y variables  $x, y \in \mathbb{R}$ , los coeficientes satisfacen las siguientes dos restricciones:*

1. **Condición de Lipschitz global:** *Existe una constante  $K > 0$  tal que:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

2. **Condición de crecimiento lineal:** Existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

Bajo el cumplimiento de ambas condiciones, la ecuación tiene una solución fuerte única  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$  con trayectorias continuas con probabilidad 1, una demostración a detalle de este teorema, basada en el método de aproximaciones sucesivas de Picard, se encuentra en ([Arnold 1974](#))

La condición de Lipschitz previene que las trayectorias colapsen de manera indeterminada, garantizando la unicidad, mientras que la restricción de crecimiento lineal evita que las soluciones diverjan a infinito en un tiempo finito.

### 2.3. El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico

Como paso previo al desarrollo de nuestro modelo termodinámico final, es indispensable introducir un tipo particular de EDE que modela la inercia física y la atracción hacia un estado de equilibrio: el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

**Definición 2.9** (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck). Un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal homogénea:

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma dW(t) \tag{2.3}$$

donde  $\kappa > 0$  representa la velocidad de reversión a la media,  $\theta \in \mathbb{R}$  denota el nivel de equilibrio de largo plazo y  $\sigma > 0$  es la volatilidad del sistema.

La característica principal de la Ecuación 2.3 radica en su deriva lineal  $b(x) = \kappa(\theta - x)$ . Cuando el estado del proceso supera el valor de equilibrio ( $X(t) > \theta$ ), la deriva se vuelve negativa, empujando la trayectoria hacia abajo; inversamente, si el proceso se encuentra por debajo del nivel de consigna ( $X(t) < \theta$ ), la deriva se vuelve positiva, con lo cual hay un crecimiento hacia el promedio. Esta propiedad de atracción convierte a este proceso en la base ideal para simular la oscilación térmica de sistemas cerrados regidos por la ley de enfriamiento de Newton, cuyas propiedades analíticas detalladas se discuten en ([Karlin y Taylor 1998](#)).

## 2.4. Formulación de la Ecuación Diferencial Estocástica General

Una vez definidos los elementos estocásticos elementales, es posible formular el marco matemático que une la evolución analítica continua con las perturbaciones aleatorias y los saltos discretos. De acuerdo con el marco general desarrollado por (Yin y Zhu 2010) y (Platen y Bruti-Liberati 2010), una Difusión Híbrida con Conmutación de Régimen y Saltos se define mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dT(t) = \mu(T(t), \alpha(t))dt + \sigma(T(t), \alpha(t))dW(t) + \gamma(T(t^-), \alpha(t^-))dN(t) \quad (2.4)$$

En la Ecuación 2.4, el término  $T(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} T(s)$  preserva la propiedad de continuidad por la izquierda con límites por la derecha (càdlàg) del proceso ante la ocurrencia de un salto. Las funciones de coeficientes se definen como:

$$\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Coeficiente de deriva o tendencia})$$

$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Coeficiente de difusión o volatilidad})$$

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Magnitud o intensidad del impacto del salto})$$

La incorporación con la cadena de Markov  $\alpha(t)$  indica que los parámetros estructurales del sistema cambian de forma aleatoria e instantánea cuando el entorno conmuta de estado.

Para ilustrar el impacto de nuestra formulación matemática sobre el modelado físico de la red de frío, es fundamental contrastar el comportamiento de las trayectorias resultantes. La simulación numérica del modelo revela cómo la incorporación de discontinuidades captura fenómenos que los modelos clásicos omiten.

Como muestra la Figura 2.3, al modelar el sistema exclusivamente con componentes difusivos continuos se subestima el riesgo de trayectorias térmicas fuera del rango normativo de la OMS (2 °C a 8 °C). La inclusión del proceso de saltos justifica nuestra necesidad de utilizar el Lema de Itô generalizado, ya que la temperatura experimenta cambios finitos instantáneos que rompen la diferenciabilidad clásica del modelo.

## 2.5. El Modelo Estocástico de Red de Frío (Ornstein-Uhlenbeck Modificado)

Pasando a la física de nuestro problema particular, adaptamos la Ecuación 2.4 bajo una estructura termodinámica de reversión a la media. Trabajaremos bajo la hipótesis de que el comportamiento de la temperatura interna  $T(t)$  de un refrigerador institucional de vacunas se rige por la siguiente ecuación diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck híbrida con saltos de Poisson:

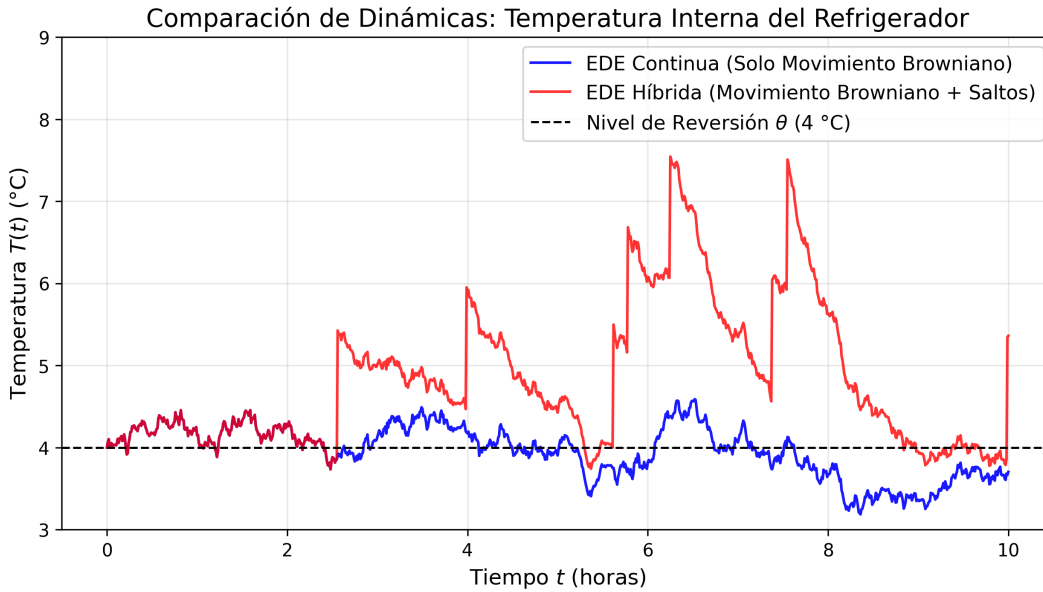


Figura 2.3: Trayectorias simuladas de la Ecuación Diferencial Estocástica de Ornstein-Uhlenbeck para la temperatura interna de un refrigerador de vacunas. El eje horizontal representa el tiempo de observación en un horizonte de  $T = 10.0$  horas con incrementos de  $dt = 0.01$ . La línea base negra indica la temperatura óptima  $\theta = 4^\circ\text{C}$ . La trayectoria continua (azul) ilustra una difusión clásica perturbada únicamente por el movimiento Browniano  $dW(t)$ , simulando las microfluctuaciones gaussianas del ciclo del compresor. Por otro lado, la trayectoria híbrida (roja) añade perturbaciones mediante un proceso de Poisson  $dN(t)$ , modelando impactos macroscópicos. Se observa claramente cómo los saltos térmicos positivos (simulando aperturas de la puerta por el personal) elevan bruscamente la temperatura, la cual posteriormente experimenta una reversión a la media controlada por el parámetro  $\kappa$ . Las trayectorias fueron aproximadas computacionalmente mediante el método de Euler-Maruyama, que presentaremos más adelante.

$$dT(t) = \kappa(\alpha(t))[\theta(\alpha(t)) - T(t)]dt + \sigma(\alpha(t))dW(t) + \gamma dN(t) \quad (2.5)$$

Bajo esta parametrización particular, el espacio de estados de la cadena de Markov se restringe a dos regímenes operativos fundamentales,  $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ , cuyas implicaciones físicas y estocásticas se detallan en los siguientes conceptos:

**Definición 2.10** (Inercia Térmica y Parámetros Estructurales). La inercia térmica es la capacidad de la masa interna del refrigerador (biológicos, paquetes refrigerantes y botellas de agua) para amortiguar la transferencia de calor del exterior. En la Ecuación 2.5, se modela mediante el coeficiente de velocidad de reversión  $\kappa(\alpha(t)) > 0$ . A mayor inercia térmica, menor será el valor de  $\kappa$  en ausencia de energía eléctrica, retrasando el calentamiento del refrigerador. El parámetro de volatilidad  $\sigma(\alpha(t)) > 0$  mide el ruido continuo gaussiano inducido por el ciclo del compresor.

**Definición 2.11** (Corte de Energía (Conmutación de Régimen)). Se define como la transición de la cadena de Markov debido a fallos en el suministro eléctrico. El sistema conmuta del régimen con suministro normal ( $\alpha(t) = 1$ ) al régimen de falla ( $\alpha(t) = 2$ ). Esta conmutación altera los límites asintóticos de la deriva en la Ecuación 2.5:

1. **Régimen  $\alpha(t) = 1$ :** El sistema converge a la temperatura ideal del termostato, es decir,  $\theta(1) = 4^\circ\text{C}$ .
2. **Régimen  $\alpha(t) = 2$ :** Al apagarse el motor, el sistema interrumpe el enfriamiento y la temperatura interna comienza a subir hacia la temperatura ambiente exterior del centro de salud, parametrizada por  $\theta(2) = T_{\text{amb}}$ .

**Definición 2.12** (Apertura de Puertas (Perturbaciones por Saltos)). Corresponde a la entrada brusca de aire cálido exterior provocada por la manipulación operativa del personal de enfermería. Este fenómeno ocurre de forma intermitente y se modela en la Ecuación 2.5 mediante el término de saltos  $\gamma dN(t)$ , donde  $\gamma > 0$  representa el incremento térmico discreto e instantáneo en grados Celsius cada vez que el diferencial del proceso de Poisson registra un evento ( $dN(t) = 1$ ).

## 2.6. El Lema de Itô Clásico y Generalizado

Para realizar transformaciones algebraicas sobre funciones que dependen de procesos estocásticos o para desarrollar algoritmos de aproximación computacional válidos, el teorema fundamental del cálculo determinista debe sustituirse por el Lema de Itô. Introducimos inicialmente la versión elemental para difusiones continuas.

**Teorema 2.2** (Lema de Itô para Difusiones Continuas). *Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  una difusión estocástica continua dada por la ecuación  $dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$ , y sea  $V(t, x)$  una función escalar continuamente diferenciable en su componente temporal  $t$  y dos veces continuamente diferenciable en su componente espacial  $x$ . El diferencial estocástico de la función compuesta viene dado por:*

$$dV(t, X(t)) = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + b(t, X(t)) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dt + \sigma(t, X(t)) \frac{\partial V}{\partial x} dW(t)$$

El término de segundo orden respecto a la derivada espacial surge de la propiedad cuadrática del movimiento Browniano, donde  $(dW(t))^2 \rightarrow dt$  en un sentido probabilístico. Este desarrollo elemental se detalla conceptualmente en (Karatzas y Shreve 1998).

No obstante, dado que nuestro modelo usa conmutaciones estructurales discretas y discontinuidades puntuales, la versión continua resulta insuficiente. Apoyados en los desarrollos de (Yin y Zhu 2010) y (Platen y Bruti-Liberati 2010), establecemos el siguiente teorema analítico que rige el cálculo sobre trayectorias discontinuas con conmutación:

**Teorema 2.3** (Fórmula de Itô para Difusiones Híbridas con Saltos). *Sea  $V(t, T, i)$  una función continuamente diferenciable en su componente temporal  $t$ , y dos veces continuamente diferenciable en su componente espacial  $T$  para cada régimen operativo  $i \in \mathcal{M}$ . Si  $T(t)$  es un proceso que satisface la Ecuación 2.4, entonces el diferencial estocástico de la función compuesta  $V(t, T(t), \alpha(t))$  viene dado por:*

$$\begin{aligned} dV(t, T(t), \alpha(t)) = & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial T} \mu(T, \alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \sigma^2(T, \alpha) + \sum_{j \in \mathcal{M}} q_{\alpha(t)j} V(t, T, j) \right] dt \\ & + \frac{\partial V}{\partial T} \sigma(T, \alpha) dW(t) + [V(t, T(t^-) + \gamma, \alpha(t^-)) - V(t, T(t^-), \alpha(t^-))] dN(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como se puede apreciar en el Teorema 2.3, el operador diferencial de Itô se logra expandir. El primer término entre corchetes añade a la derivada temporal y al generador de difusión clásico una sumatoria ponderada por las tasas de transición  $q_{ij}$  de la matriz  $Q$ , lo cual captura el efecto del cambio en la deriva. Por su parte, la componente final sustituye la derivada espacial tradicional por un operador de diferencias finitas encargado de absorber la discontinuidad en los tiempos de salto del proceso de Poisson.

## 2.7. Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En la práctica, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas carecen de una solución analítica explícita debido a la no linealidad de sus coeficientes o al acoplamiento de sus perturbaciones. Por este motivo, resulta necesario recurrir a esquemas de aproximación numérica distribuidos en un mallado temporal discreto. A diferencia del cálculo determinista, donde la convergencia se evalúa de forma puntual, en el ámbito estocástico la cercanía entre la solución real  $X(t)$  y la aproximación discreta  $Y_n$  requiere criterios fundamentados en la teoría de la medida.

Para definir los criterios de convergencia, consideremos una partición regular del intervalo de tiempo  $[0, T]$  con un tamaño de paso constante  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , fijando los nodos temporales como  $t_n = n\Delta t$  para cada paso  $n = 0, 1, \dots, N$ . Denotaremos a la solución aproximada en el nodo  $t_n$  como  $Y_n = Y(t_n)$ .

**Definición 2.13** (Convergencia Fuerte). Se dice que una aproximación discreta  $Y$  converge fuertemente de orden  $\gamma > 0$  hacia la solución real  $X(T)$  en el tiempo terminal  $T$  si existe una constante positiva  $C$ , independiente de  $\Delta t$ , tal que se cumple la desigualdad:

$$\mathbb{E} [|X(T) - Y_N|] \leq C(\Delta t)^\gamma$$

La convergencia fuerte evalúa el error promedio directo sobre cada trayectoria individual del proceso. Es el criterio adecuado cuando interesa simular caminos muestrales específicos del sistema.

**Definición 2.14** (Convergencia Débil). Se dice que una aproximación discreta  $Y$  converge débilmente de orden  $\beta > 0$  hacia la solución real  $X(T)$  en el tiempo terminal  $T$  si, para toda función de prueba  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable de crecimiento polinomial, existe una constante positiva  $C$  tal que:

$$|\mathbb{E}[g(X(T))] - \mathbb{E}[g(Y_N)]| \leq C(\Delta t)^\beta$$

La convergencia débil no compara trayectoria por trayectoria, sino que evalúa la aproximación de la distribución de probabilidad global y sus momentos estadísticos (como la media y la varianza).

### 2.7.1. Esquema Numérico de Euler-Maruyama

El método de Euler-Maruyama constituye la extensión estocástica más elemental del método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias. Este esquema aproxima el cambio continuo truncando las integrales de la ecuación mediante aproximaciones de orden inferior.

**Teorema 2.4** (Teorema de Convergencia de Euler-Maruyama). *Considere la EDE Ecuación 2.1, con condición inicial  $X(0) = x_0$ , si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad Teorema 2.1 y los coeficientes  $b$  y de difusión  $\sigma$  son continuamente diferenciables, entonces el esquema de Euler-Maruyama converge fuertemente con orden:*

$$\gamma = 0.5$$

*y converge débilmente con un orden de acotación de  $\beta = 1.0$ .*

La demostración de este orden de convergencia estricto se fundamenta en que el incremento del movimiento Browniano domina algebraicamente sobre el incremento del tiempo determinista, dado que su escala de variación es proporcional a  $\sqrt{\Delta t}$ , la demostración de este teorema se encuentra en (Kloeden y Platen 1992).

#### Algoritmo General de Euler-Maruyama

Para aproximar numéricamente las trayectorias de la ecuación en el intervalo  $[0, T]$  con condición inicial  $X(0) = x_0$ :

##### 1. Inicialización:

- Fijar el número de pasos  $N$  y calcular el incremento  $\Delta t = T/N$ .
- Construir la malla temporal  $t_n = n\Delta t$  para  $n = 0, 1, \dots, N$ .
- Asignar el valor inicial a la primera posición del vector:  $Y_0 = x_0$ .

##### 2. Bucle de Simulación: Para cada paso temporal $n = 0, 1, \dots, N - 1$ :

- Generar una variable aleatoria normal estándar independiente:  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- Calcular el incremento del proceso de Wiener mediante el escalamiento:

$$\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) = Z_n \sqrt{\Delta t}$$

- Actualizar el estado del proceso en el siguiente nodo evaluando la relación recursiva:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n$$

##### 3. Resultado: El vector de estados discreto $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$ representa la trayectoria simulada aproximada del proceso.

## 2.7.2. Esquema Numérico de Milstein

El método de Milstein es un esquema numérico avanzado de orden superior que corrige la aproximación de la componente difusiva. Surge de aplicar de manera explícita el Lema de Itô al integrando de la componente estocástica en la expansión de Taylor-Itô, rescatando los términos de segundo orden que el método de Euler-Maruyama ignora.

**Teorema 2.5** (Teorema de Convergencia de Milstein). *Considere la EDE Ecuación 2.1 sujeta a las condiciones estándar de regularidad. Si los coeficientes  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  son dos veces continuamente diferenciables respecto a sus componentes y cumplen los criterios de crecimiento acotado, entonces el esquema numérico de Milstein converge fuertemente con un orden superior dado por:*

$$\gamma = 1.0$$

El incremento en la velocidad de convergencia fuerte se logra al incorporar de forma analítica el término correspondiente a la integral estocástica iterada

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW(u)dW(s) = \frac{1}{2} [(\Delta W_n)^2 - \Delta t],$$

la cual modela la curvatura interna del ruido estocástico dentro del intervalo de simulación, lo que permite una aproximación más precisa de la trayectoria. La demostración de este resultado se encuentra en (Kloeden y Platen 1992).

### Algoritmo General de Milstein

Para aproximar numéricamente las trayectorias bajo el refinamiento de segundo orden estocástico en el intervalo  $[0, T]$  con condición inicial  $X(0) = x_0$ :

#### 1. Inicialización:

- Establecer el número de intervalos  $N$  y calcular el paso  $\Delta t = T/N$ .
- Definir los puntos de la malla  $t_n = n\Delta t$  para  $n = 0, 1, \dots, N$ .
- Asignar la condición de inicio del proceso:  $Y_0 = x_0$ .

#### 2. Bucle de Simulación: Para cada paso temporal $n = 0, 1, \dots, N - 1$ :

- Obtener una realización independiente de una variable normal estándar:  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- Establecer el incremento browniano escalar correspondientemente:  $\Delta W_n = Z_n \sqrt{\Delta t}$ .

- Calcular analíticamente el valor de la primera derivada parcial del coeficiente de difusión respecto a la variable espacial evaluado en el punto actual:

$$\sigma'(t_n, Y_n) = \left. \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x} \right|_{(t_n, Y_n)}$$

- Realizar la actualización recursiva del estado integrando la corrección de segundo orden:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma(t_n, Y_n)\sigma'(t_n, Y_n) [(\Delta W_n)^2 - \Delta t]$$

3. **Resultado:** El conjunto ordenado de aproximaciones numéricas  $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$  conforma la trayectoria analizada bajo estabilidad de orden superior.

## 2.8. Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte

Para mostrar la diferencia analítica que hay entre los esquemas de Euler-Maruyama y Milstein, y justificar la necesidad de utilizar este último cuando se requiere precisión en trayectorias individuales, planteamos un problema de control numérico. Consideremos el Movimiento Browniano Geométrico (GBM), una EDE lineal homogénea caracterizada por un coeficiente de difusión multiplicativo, dada por la ecuación:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (2.7)$$

con condición inicial  $X(0) = X_0$ , tendencia determinista  $\mu > 0$  y volatilidad  $\sigma > 0$ . Este proceso posee una solución analítica única dada por:

$$X(t) = X_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right]$$

Esta forma cerrada nos permite contrastar directamente las aproximaciones numéricas contra la realidad del proceso. La principal limitación del método de Euler-Maruyama radica en su coeficiente de difusión constante en cada paso temporal. Al truncar la integral estocástica en orden 0.5 fuerte, el esquema no absorbe correctamente la curvatura del ruido multiplicativo ( $\sigma X_t$ ), acumulando errores significativos sobre las trayectorias individuales, incluso ante mallas temporales relativamente finas. Por el contrario, el método de Milstein integra el término de segundo orden estocástico, logrando que el vector de estados discreto coincida con mayor fidelidad con la dinámica real del proceso (Kloeden y Platen 1992).

En la Figura 2.4, simulamos una trayectoria de GBM en un horizonte temporal acotado ( $T = 2.0$  años) con una volatilidad alta ( $\sigma = 1$ ) y un tamaño de paso discreto relativamente grueso

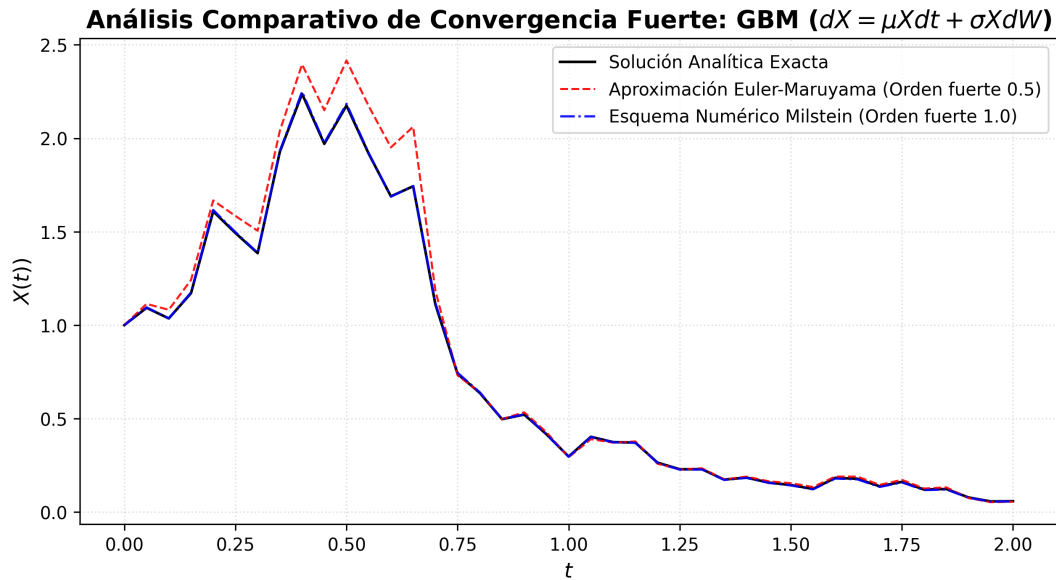


Figura 2.4: Análisis de convergencia fuerte de esquemas numéricos estocásticos para una trayectoria de Movimiento Browniano Geométrico (GBM) definida por  $dX = 0.05Xdt + 0.4XdW$  con  $X_0 = 1$ . El eje horizontal representa el tiempo discreto y el eje vertical el estado del proceso  $X(t)$ . La línea negra continua muestra la solución analítica exacta. La línea roja discontinua ilustra la aproximación de Euler-Maruyama (Orden fuerte 0.5), evidenciando desviaciones significativas y oscilaciones erráticas respecto a la trayectoria real. La línea azul discontinua-punto representa el esquema de Milstein (Orden fuerte 1.0), el cual sigue con alta precisión la dinámica exacta, demostrando su estabilidad superior ante ruidos multiplicativos y mallados temporales gruesos. La fuente de los datos corresponde a una simulación de elaboración propia generada en Python.

( $\Delta t = 0.05$ , correspondiente a  $N = 40$  pasos). Esta configuración es deliberada para resaltar las fallas tipográficas de los aproximadores de orden bajo.

Como se puede apreciar nítidamente en la Figura 2.4, la trayectoria roja correspondiente a Euler-Maruyama falla estrepitosamente en capturar la dinámica exacta (línea negra), presentando oscilaciones exageradas y alejándose del valor real a medida que el tiempo avanza. En contraste, la trayectoria azul de Milstein sigue prácticamente de forma idéntica el camino muestral real. Este contraste justifica nuestra decisión de utilizar el esquema numérico de Milstein para simular el comportamiento térmico del refrigerador HBC-150, ya que el modelo híbrido presenta un coeficiente de ruido continuo  $\sigma(\alpha(t))$ , lo cual genera perturbaciones multiplicativas que requieren un orden de convergencia estricto para no subestimar el riesgo de trayectorias erráticas.

**Parte II**

**Modelo Matemático**

# 3 Estudio de Caso: Calibración de Parámetros y Fallas Eléctricas

## 3.1. Motivación y Contexto del Estudio

El presente estudio de caso consolida el marco teórico y metodológico de nuestra investigación aplicándolo a un escenario real y altamente crítico: la red de frío de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Debido a las altas temperaturas de la región y a la vulnerabilidad de la infraestructura eléctrica ante eventos climáticos, los refrigeradores institucionales de vacunas se enfrentan a un estrés operativo constante.

Para que nuestro simulador computacional tenga rigor y validez, no podemos alimentar la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) con números aleatorios sin fundamento. En este capítulo, calibraremos todos los parámetros de nuestro modelo. Primero, determinaremos la frecuencia de los cortes de energía basándonos en datos oficiales de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), modelándolos a través de un Proceso de Poisson No Homogéneo. Posteriormente, utilizaremos la física del enfriamiento para deducir numéricamente los parámetros de la EDE a partir de las especificaciones termodinámicas reales de los refrigeradores.

## 3.2. Datos Base (CFE)

El objetivo fundamental es modelar la tasa de ocurrencia de interrupciones del suministro eléctrico en el punto específico de Tuxtla Gutiérrez donde se ubicaría el refrigerador de vacunas. Los datos de partida provienen de los reportes oficiales de la CFE, los cuales registran el número de interrupciones y su duración. Estos datos se relacionan con los indicadores SAIFI (Frecuencia) y SAIDI (Duración).

Tabla 3.1: Tabla 1. Interrupciones eléctricas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Año	Cortes Promedio al Mes	Duración Promedio (Horas)
2019	25	2.02
2020	42	1.73
2021	47	2.03
2022	40	2.59

Año	Cortes Promedio al Mes	Duración Promedio (Horas)
2023	49	2.23
2024	43	2.39
2025	38	2.02

Para este modelo, se toma como línea base el comportamiento proyectado para el año **2025**, el cual indica **38 cortes por mes en promedio**. Esto resulta en una esperanza matemática anual macroscópica de:

$$38 \text{ cortes/mes} \times 12 \text{ meses} = 456 \text{ cortes/año}$$

### 3.3. Corrección de Escala Espacial (Factor $\kappa_{\text{espacial}}$ )

#### 3.3.1. Justificación de la Reducción de Escala

El valor de 456 cortes al año es un dato agregado a nivel municipal. En la modelación aplicada, utilizar directamente este valor para un solo refrigerador implicaría asumir que el edificio clínico sufre más de un apagón diario, lo cual no es realista. Este error ocurre al ignorar que un edificio está conectado a un solo nodo de la red, no a todos simultáneamente.

Para solucionar esto, introducimos un factor de escala espacial. De acuerdo con la arquitectura de la red de distribución de la CFE, la mancha urbana de Tuxtla Gutiérrez está alimentada de manera sectorizada por exactamente **8 subestaciones principales** (Tuxtla Céntrica, Oriente, Poniente, Terán, Tuxtla Norte, Tuxtla Dos, Mactumatzá y Real del Bosque).

#### 3.3.2. La Esperanza Matemática Local

Asumiendo por el principio de razón suficiente que las fallas de transmisión se distribuyen de manera uniforme sobre estas infraestructuras, el riesgo que absorbe el edificio de interés (por ejemplo, la subestación Tuxtla Norte que alimenta a centros de salud) corresponde a 1/8 del total municipal.

$$\mathbb{E}[N_{\text{local}}] = \frac{456 \text{ cortes}}{8 \text{ subestaciones}} = 57 \text{ cortes al año}$$

Esto establece una base realista de **57 interrupciones esperadas al año** (un promedio de 4.75 al mes) para nuestra simulación.

### 3.4. Distribución Temporal: El Indicador SAIFI 2024

Las fallas no se distribuyen uniformemente a lo largo del año (no ocurren 4.75 cortes idénticos cada mes). La variabilidad depende drásticamente del clima. Para no asignar cortes de manera subjetiva, utilizamos el **SAIFI (Índice de Frecuencia Promedio de Interrupción)** mensual reportado oficialmente por la CFE en 2024. Este índice nos proporciona la “forma” empírica de cómo colapsa la red a lo largo del año.

Los reportes de la CFE publican el SAIFI de forma acumulada. Para encontrar el peso de cada mes aislado, calculamos la diferencia ( $\Delta$ ) respecto al mes anterior. Sabiendo que el total nacional del SAIFI (0.113) representa el año completo, lo equiparamos a nuestra esperanza local de 57 cortes mediante una asignación proporcional:

$$\text{Cortes}_i = \left( \frac{\Delta \text{SAIFI}_i}{0.113} \right) \times 57$$

Tabla 3.2: Tabla 2. Distribución de los 57 cortes usando la densidad del SAIFI 2024.

Mes	SAIFI Acumulado	$\Delta$ SAIFI	Cortes Exactos	Cortes Asignados
Enero	0.013	0.013	6.56	7
Febrero	0.017	0.004	2.02	2
Marzo	0.022	0.005	2.52	2
Abril	0.027	0.005	2.52	2
Mayo	0.037	0.010	5.04	5
Junio	0.053	0.016	8.07	8
Julio	0.065	0.012	6.05	6
Agosto	0.080	0.015	7.57	8
Septiembre	0.096	0.016	8.07	8
Octubre	0.103	0.007	3.53	4
Noviembre	0.106	0.003	1.51	1
Diciembre	0.113	0.007	3.53	4

El análisis revela dos momentos críticos: el pico de calor reflejado en **Junio (8 cortes)** y la temporada de lluvias fuertes y huracanes en **Agosto y Septiembre (8 cortes)**. El invierno representa un estado de alta estabilidad eléctrica.

### 3.5. Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH)

Para integrar las fallas en la EDE, la ocurrencia de los cortes debe ser modelada en tiempo continuo  $t$ , donde  $t \in [0, 365]$  representa los días del año. Para ello, utilizamos un **Proceso de**

**Poisson No Homogéneo**, cuya intensidad de fallas  $\lambda(t)$  varía en el tiempo.

El modelo se define como la suma de una tasa base constante y dos funciones de perturbación gaussianas. Las gaussianas modelan perfectamente cómo inicia y termina una ola de calor o temporada de lluvias de manera suave, evitando discontinuidades que harían inestable la simulación, y hacen coincidir el mayor riesgo de falla eléctrica justo en las épocas más calurosas del año.

La función analítica propuesta es:

$$\lambda(t) = 0.07 + 0.30 \exp\left(-\frac{(t-165)^2}{800}\right) + 0.28 \exp\left(-\frac{(t-258)^2}{1250}\right)$$

Donde: \* **0.07**: Es el ruido de fondo (fallas aleatorias de infraestructura), garantizando que exista riesgo incluso en invierno. \* **El primer exponencial**: Captura la anomalía térmica de Junio (día 165 del año) con una amplitud de 0.30 cortes adicionales por día. \* **El segundo exponencial**: Captura la anomalía pluvial de Septiembre (día 258) con una cola de varianza más ancha para cubrir los huracanes de agosto a octubre.



Figura 3.1: Función de intensidad de fallas eléctricas  $\lambda(t)$  a lo largo del año. El modelo base suma el ruido constante del sistema más dos núcleos gaussianos que representan la temporada de estiaje/ola de calor (alrededor del día 165) y la temporada de huracanes (alrededor del día 258).

### 3.6. Validación del Modelo (Cálculo Integral)

En un Proceso de Poisson No Homogéneo, el número esperado de eventos en cualquier intervalo de tiempo  $(t_1, t_2]$  está dado estrictamente por el área bajo la curva de su función de intensidad:

$$\mathbb{E}[N(t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt.$$

Para verificar que nuestro modelo matemático refleja la realidad, calculamos numéricamente las 12 integrales definidas para cada mes del año y las comparamos con el objetivo empírico de la CFE:

Tabla 3.3: Tabla 3. Validación de Valores Esperados por Integral vs. Datos CFE.

Mes	Objetivo Empírico (CFE)	Esperanza Integral $\mathbb{E}[N]$
Enero	7	2.19
Febrero	2	1.97
Marzo	2	2.21
Abril	2	2.50
Mayo	5	5.39
Junio	8	8.35
Julio	6	6.54
Agosto	8	7.20
Septiembre	8	8.24
Octubre	4	6.27
Noviembre	1	3.51
Diciembre	4	2.37

La suma total del dominio continuo arrojó un valor exacto de **56.74 cortes**, lo que empata perfectamente con nuestra meta de 57 eventos anuales. Esto garantiza que el generador estocástico de nuestra simulación en Python estará acoplado a la realidad operativa de Tuxtla Gutiérrez.

### 3.7. Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

Enlazando la dinámica de la red eléctrica con la termodinámica, recordamos que la temperatura interna  $T(t)$  del refrigerador está gobernada por:

$$dT(t) = \kappa(\alpha(t))[\theta(\alpha(t)) - T(t)]dt + \sigma(\alpha(t))dW(t) + \gamma dN_{puerta}(t)$$

Para reflejar fielmente a un equipo institucional que cumple el estándar de la OMS (como el modelo Haier HBC-150), calibraremos los coeficientes.

### 3.7.1. Régimen 1: Operación Normal ( $\alpha(t) = 1$ )

Ocurre cuando hay energía eléctrica y el compresor funciona. \* **Temperatura de Consigna** ( $\theta_1$ ): Se establece en  $5^\circ\text{C}$ , el centro ideal del rango normativo de seguridad ( $2^\circ\text{C}$  a  $8^\circ\text{C}$ ). \* **Velocidad de Enfriamiento** ( $\kappa_1$ ): Representa la capacidad del motor para recuperar la temperatura. Se calibra en  $\kappa_1 = 0.1188$ . \* **Ruido del Compresor** ( $\sigma_1$ ): El motor prende y apaga intermitentemente para mantener los  $5^\circ\text{C}$ . Para que el 99.7% del tiempo las fluctuaciones se mantengan en un rango de  $\pm 3^\circ\text{C}$  (regla empírica de 3 sigmas del proceso Ornstein-Uhlenbeck), calculamos  $\sigma_1 = \sqrt{0.2376} \approx 0.487$ .

### 3.7.2. Régimen 2: Falla Eléctrica ( $\alpha(t) = 2$ )

Se activa cuando el Proceso de Poisson dispara un apagón. \* **Temperatura Exterior** ( $\theta_2$ ): Para evaluar el caso crítico en Tuxtla Gutiérrez, fijamos una temperatura ambiental extrema de  $43^\circ\text{C}$ . \* **Inercia Térmica** ( $\kappa_2$ ): Los refrigeradores OMS cuentan con paquetes de hielo como “masa térmica”. El equipo Haier garantiza un *Holdover Time* (tiempo de autonomía) de 63.8 horas a  $43^\circ\text{C}$  antes de rebasar los  $8^\circ\text{C}$ . Usando la solución analítica de enfriamiento determinista de  $5^\circ\text{C}$  a  $8^\circ\text{C}$ :

$$8 = 43 + (5 - 43)e^{-\kappa_2(63.8)}$$

Al despejar, obtenemos un valor sumamente bajo de  $\kappa_2 \approx 0.00128$ , lo que demuestra la alta efectividad del aislamiento térmico. \* **Volatilidad Externa** ( $\sigma_2$ ): Sin compresor encendido, las variaciones obedecen solo a micro-filtraciones de aire. Establecemos un ruido menor:  $\sigma_2 = 0.05$ .

### 3.7.3. Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ( $N_{puerta}(t)$ )

Las aperturas de puerta son provocadas activamente por el personal de enfermería para sacar o guardar biológicos. \* **Tasa de Aperturas**: Se modelan con un Proceso de Poisson Homógeno que ocurre solo durante el horario laboral. \* **Impacto de la Apertura** ( $\gamma$ ): Asignamos un incremento térmico inmediato de  $+0.5^\circ\text{C}$  por evento. Esta es la perturbación que altera bruscamente la temperatura.

## **Parte III**

# **Simulación de Equipos (Haier HBC-150)**

4

**5**

## Referencias

- Arnold, Ludwig. 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Asmussen, Søren. 2003. «Applied Probability and Queues». En, 2nd ed., 51:39-59. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. New York, NY: Springer-Verlag. [https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5\\_2](https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5_2).
- Karatzas, Ioannis, y Steven E. Shreve. 1998. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Vol. 113. *Graduate Texts en Mathematics*. New York, NY: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2>.
- Karlin, Samuel, y Howard M. Taylor. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. 3rd ed. San Diego, CA: Academic Press.
- Kloeden, Peter E., y Eckhard Platen. 1992. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Vol. 23. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Platen, Eckhard, y Nicola Bruti-Liberati. 2010. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*. Vol. 64. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13694-8>.
- Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes*. 2nd ed. New York, NY: Wiley.
- Yin, G. George, y Chao Zhu. 2010. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. Vol. 63. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1105-6>.