

Tesis

Cristóbal Pérez González Dr. Yofre Hernán García Gómez

2026-07-31

Tabla de contenidos

1	Introducción	4
I	Marco Teórico y Normativa	6
2	Fundamentos Teóricos	7
2.1	Procesos Estocásticos	7
2.1.1	Movimiento Browniano (Proceso de Wiener)	8
2.1.2	Procesos de Poisson	8
2.1.3	Cadenas de Markov a Tiempo Continuo	10
2.2	Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y la Integral de Itô	12
2.3	El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico	14
2.4	Formulación de la Ecuación Diferencial Estocástica General	15
2.5	El Modelo Estocástico de Red de Frío (Ornstein-Uhlenbeck Modificado)	15
2.6	El Lema de Itô Clásico y Generalizado	17
2.7	Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	18
2.7.1	Esquema Numérico de Euler-Maruyama	19
2.7.2	Esquema Numérico de Milstein	21
2.8	Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte	22
II	Modelo Matemático	25
3	Estudio de Caso: Calibración Termodinámica, Eléctrica y Cinética de Degradación	26
3.1	Motivación y Contexto del Estudio	26
3.2	Datos Base e Histórico de Interrupciones Eléctricas	27
3.3	Corrección de Escala Espacial (Factor $\kappa_{espacial}$)	28
3.3.1	Justificación de la Reducción de Escala	28
3.3.2	La Esperanza Matemática Local	28
3.4	Distribución Temporal de las Fallas	28
3.4.1	1. Índice de la Frecuencia de Interrupción Promedio, en número (SAIFI)	29
3.4.2	2. Índice de Duración Promedio de Interrupción, en minutos (SAIDI)	29
3.5	Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH)	31
3.6	Validación del Modelo (Cálculo Integral)	33
3.7	Distribución Log-Normal de las Duraciones de las Fallas	34
3.7.1	Desglose Mensual de Horas de Interrupción	35

3.7.2	Cálculo de Medias y Varianzas por Régimen	36
3.7.3	Transformación Analítica a Parámetros Log-Normales	36
3.8	Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)	37
3.8.1	Régimen 1: Operación Normal ($\alpha(t) = 1$)	39
3.8.2	Régimen 2: Falla Eléctrica ($\alpha(t) = 2$)	39
3.8.3	Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$)	40
3.9	Cinética de Degradación Térmica (Ecuación de Arrhenius)	40
3.9.1	El Modelo de Daño Térmico Acumulado (DA)	41
III	Simulación de Equipos (Haier HBC-150)	42
4	Metodología de Simulación Computacional y Análisis Estadístico de Riesgo	43
4.1	1. Procesamiento Temporal y Entorno Climático	43
4.2	2. Parametrización Física, Cinética y Estocástica de la Red	44
4.2.1	Parámetros Termodinámicos y Cinéticos del Equipo	45
4.2.2	Parámetros Estocásticos de Fallas de la CFE	46
4.3	3. Precalibración Vectorizada de Eventos Externos	46
4.4	4. Resolución de la SDE	47
4.4.1	Integración de la Temperatura por Cambios de Régimen	47
4.4.2	Integración de la Dinámica Logística de Inventario y Mermas	49
4.5	5. Estructura de la Simulación Montecarlo	50
4.6	6. Resultados Estadísticos y Riesgo Operativo	50
5	Conclusiones y Trabajo Futuro	54
5.1	1. Conclusiones del Análisis de Riesgo Operativo	54
5.2	2. Limitaciones del Modelo y Trabajo Futuro	55
5.2.1	Estimación de Parámetros	55
5.2.2	Proceso de Saltos por Aperturas	55
	Referencias	56

1 Introducción

La conservación de vacunas en condiciones óptimas es uno de los mayores desafíos para los sistemas de salud pública. Los biológicos son productos sensibles que requieren mantenerse estrictamente dentro del rango normativo de 2°C a 8°C desde su producción hasta su aplicación. Romper esta cadena de frío altera la estructura de los antígenos, reduciendo o anulando su efectividad inmunológica de manera irreversible.

Este problema aumenta en regiones con climas cálidos extremos, como la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Las altas temperaturas ambientales aceleran la transferencia de calor hacia el interior de los equipos de refrigeración, reduciendo su tiempo de autonomía pasiva. A este factor climático se suman dos perturbaciones operativas críticas: las interrupciones en el suministro de la red eléctrica local por parte de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) y el intercambio de aire con el exterior cada vez que el personal clínico abre la puerta del equipo para extraer o resguardar dosis.

Dado que tanto los apagones como las aperturas de puerta ocurren en momentos aleatorios y con duraciones variables, los modelos matemáticos deterministas tradicionales resultan insuficientes para evaluar el comportamiento real del sistema. Para resolver esta complejidad, este trabajo presenta el desarrollo de un modelo estocástico continuo acoplado a una simulación de eventos discretos. El enfoque principal consiste en simular el comportamiento termodinámico de un refrigerador precalificado por la Organización Mundial de la Salud (OMS), específicamente el modelo Haier HBC-150, bajo las condiciones de estrés ambiental y eléctrico de la capital chiapaneca.

El documento se estructura de la siguiente manera para guiar al lector en la resolución del problema:

1. **Fundamentos Teóricos:** Se definen los principios matemáticos de los procesos estocásticos, detallando el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y su modificación mediante cambios de régimen (*regime-switching*) para alternar entre el estado de enfriamiento activo y el calentamiento pasivo.
2. **Estudio de Caso y Calibración:** Se recopilan los parámetros técnicos del refrigerador Haier HBC-150 y los datos históricos de fallas de la CFE y del clima de Tuxtla Gutiérrez, asignando valores numéricos a las tasas de atracción térmica, volatilidades y frecuencias de eventos.
3. **Metodología de Simulación Computacional:** Se describe el diseño del algoritmo implementado en Python, explicando la partición temporal en pasos de 5 minutos, la

vectorización del ruido browniano y el acoplamiento de la ecuación de Arrhenius con un modelo de inventario clínico en dientes de sierra.

4. **Análisis de Montecarlo y Riesgo Operativo:** Se discuten los resultados estadísticos extraídos de 1,000 trayectorias anuales independientes. Se analizan las mermas esperadas, el comportamiento estacional de las pérdidas en relación con las campañas de vacunación y se establece el intervalo de predicción final para la toma de decisiones en salud pública.

Parte I

Marco Teórico y Normativa

2 Fundamentos Teóricos

En este capítulo se presentarán las bases conceptuales y el marco formal del cálculo estocástico que fundamentan el desarrollo de nuestro modelo matemático para la red de frío. Se definirán en primer lugar los procesos estocásticos elementales para, posteriormente, construir la ecuación diferencial estocástica (EDE) híbrida que rige el sistema.

2.1. Procesos Estocásticos

El modelado térmico de un refrigerador de vacunas expuesto a incertidumbres continuas y perturbaciones discretas requiere herramientas más allá del cálculo determinista. Desde una perspectiva analítica, un proceso estocástico representa la generalización de una variable aleatoria indexada en un conjunto ordenado, parametrizando la evolución de un sistema bajo incertidumbre.

Definición 2.1 (Proceso Estocástico). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d$ un espacio muestral dotado de su respectiva σ -álgebra de Borel. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ parametrizadas por $t \in \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$.

Dependiendo de como es el conjunto de índices $\mathcal{T}$, los procesos estocásticos se clasifican en dos:

1. **Procesos estocásticos a tiempo discreto:** Si $\mathcal{T}$ es numerable, por lo general $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, decimos que el proceso estocástico es a tiempo discreto. En este escenario, el sistema evoluciona mediante transiciones discretas en pasos fijos discretizados.
2. **Procesos estocásticos a tiempo continuo:** Si $\mathcal{T}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, por lo general $\mathcal{T} = [0, \infty)$ o un intervalo acotado $\mathcal{T} = [0, T]$, $T > 0$, se dice que el proceso estocástico es a tiempo continuo. Esta estructura es la adecuada para modelar fenómenos físicos continuos, como la transferencia térmica.

Para enlazar la teoría probabilística con la observación empírica de un fenómeno estocástico, es indispensable establecer la distinción entre el espacio funcional del proceso y sus realizaciones particulares.

Definición 2.2 (Trayectorias del Proceso Estocástico). Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico a tiempo continuo, para cada $\omega \in \Omega$ fijo y $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, se definen las trayectorias del proceso como:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= [0, \infty) \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R} \\ t &\rightarrow X_t(\omega).\end{aligned}$$

Las propiedades analíticas de un proceso estocástico, tales como la continuidad, la diferenciabilidad y la presencia de discontinuidades finitas, se definen estrictamente a partir del comportamiento de varias componentes, para más detalles consultar (Karlin y Taylor 1998). Los componentes aleatorios de nuestro sistema se sustentan en tres procesos estocásticos específicos a tiempo continuo.

2.1.1. Movimiento Browniano (Proceso de Wiener)

Para representar las fluctuaciones térmicas continuas de baja intensidad asociadas al ruido intrínseco del termostato y microtransferencias de calor se utiliza el movimiento Browniano.

Definición 2.3 (Proceso de Wiener). Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ es un movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener si cumple con las siguientes propiedades:

1. $W(0) = 0$ con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios gaussianos, es decir, para todo $t > s \geq 0$, $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

El término $dW(t) = W(t + dt) - W(t)$ representa el diferencial del proceso de Wiener. Este denota una perturbación gaussiana elemental en un intervalo infinitesimal dt , caracterizada por una media $\mathbb{E}[dW(t)] = 0$ y una varianza $\mathbb{E}[(dW(t))^2] = dt$. Para una revisión detallada sobre las propiedades de medida y construcciones analíticas de este proceso, se sugiere consultar a (Karatzas y Shreve 1998).

2.1.2. Procesos de Poisson

Las aperturas de las puertas del refrigerador por el personal médico constituyen eventos discretos y repentinos que alteran instantáneamente la temperatura interna. Este tipo de fenómenos se modela mediante un proceso estocástico a tiempo continuo de saltos puros.

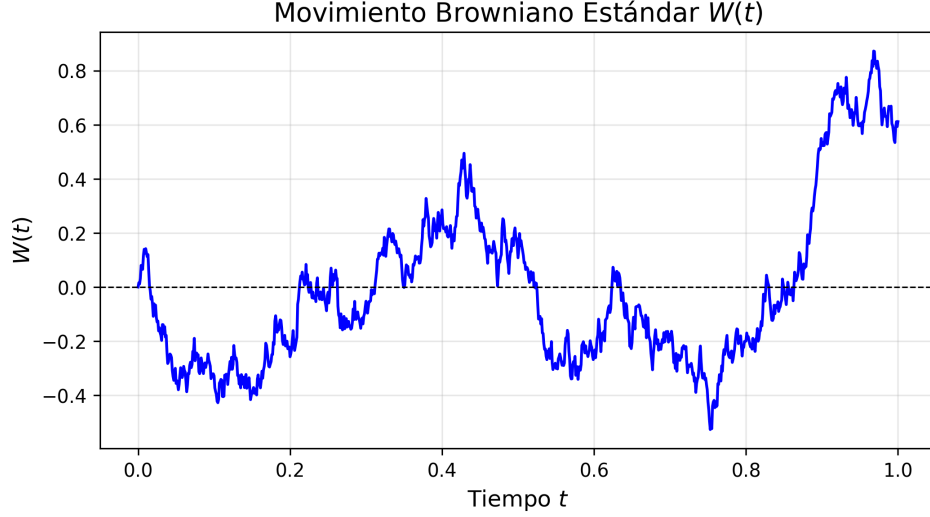


Figura 2.1: Trayectoria simulada del proceso de Wiener. El eje horizontal representa el avance del tiempo continuo en un horizonte parametrizado de $T = 1.0$ con incrementos de $dt = 0.001$. El eje vertical denota la posición de las fluctuaciones aleatorias $W(t)$, iniciando en el origen $W(0) = 0$.

Definición 2.4 (Proceso de Poisson Homogéneo). Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ que toma valores enteros en el espacio de estados $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro de intensidad constante $\lambda > 0$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$ con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias discretas $N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios; lo que implica que la ley de probabilidad de cualquier incremento $N(t + s) - N(s)$ depende únicamente de la amplitud temporal t y resulta invariante ante traslaciones sobre el origen cronológico s . De forma explícita, la variable aleatoria $N(t)$ sigue una distribución de Poisson con parámetro o tasa media dada por el producto λt , es decir:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para formalizar analíticamente el comportamiento probabilístico de los saltos sin recurrir a nociones intuitivas, las probabilidades de transición asociadas al incremento del proceso en un intervalo acotado de longitud $h > 0$ se especifican rigurosamente mediante el límite asintótico cuando $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= o(h)\end{aligned}$$

donde la notación algebraico-asintótica de Landau $o(h)$ denota una función de orden superior tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Esto garantiza formalmente que la probabilidad de ocurrencia de múltiples eventos simultáneos en una fracción temporal infinitesimal es prácticamente nula.

Sin embargo, en la dinámica real de un centro de salud, la tasa de aperturas del refrigerador no es constante; exhibe una estacionalidad diaria (por ejemplo, mayor actividad en horas pico). Para capturar esta variabilidad, generalizamos el modelo relajando la propiedad de incrementos estacionarios.

Definición 2.5 (Proceso de Poisson No Homogéneo). Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) \geq 0$ (para $t \geq 0$) si satisface las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$ con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes.
3. Para todo $t \geq 0$ y $h > 0$, la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo $(t, t+h]$ está dada por la tasa instantánea en el tiempo t :

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

4. La probabilidad de observar dos o más eventos en dicho intervalo es de orden superior a h :

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

Una exposición rigurosa sobre los procesos de conteo, sus generalizaciones no homogéneas y sus aplicaciones en sistemas con discontinuidades puede encontrarse en [\(Ross 1996\)](#).

2.1.3. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo

Los fallos prolongados en el suministro eléctrico de la red pública alteran estructuralmente la dinámica del sistema. Para modelar estas transiciones entre estados macroscópicos del entorno, introducimos una cadena de Markov en tiempo continuo.

Definición 2.6 (Cadena de Markov a Tiempo Continuo). Sea $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico que toma valores en un espacio de estados finito y discreto $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$. Se dice que $\alpha(t)$ es una cadena de Markov en tiempo continuo si para todo $s, t \geq 0$ y estados $i, j \in \mathcal{M}$, cumple la propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i, \alpha(u) = \alpha_u, 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i)$$

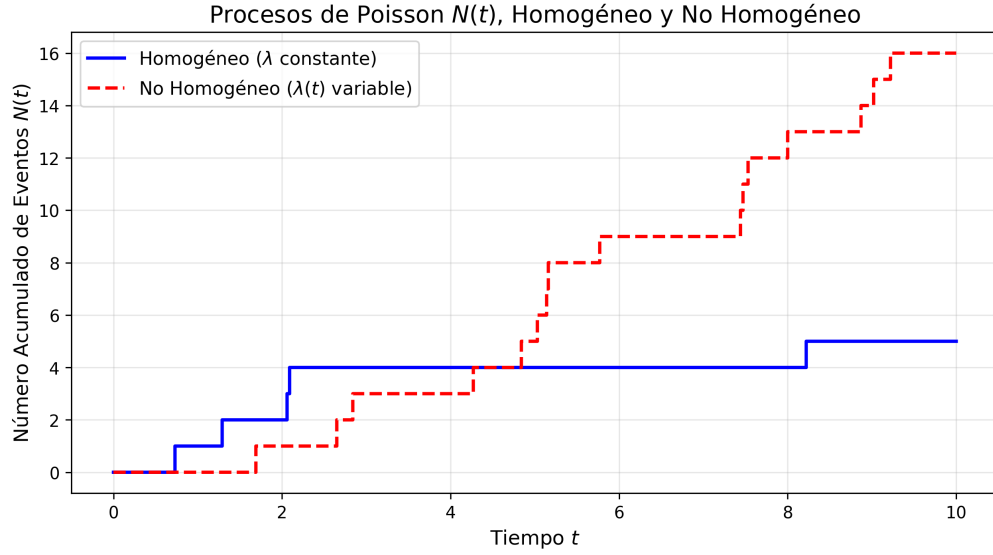


Figura 2.2: Trayectorias simuladas de dos procesos de Poisson. El eje horizontal representa el tiempo de observación en un horizonte de $T = 10.0$ con incrementos discretos de $dt = 0.01$. El eje vertical contabiliza el número acumulado de eventos discretos $N(t)$, iniciando en $N(0) = 0$. La línea continua (azul) ilustra un Proceso de Poisson Homogéneo con una tasa de intensidad constante $\lambda = 1$, evidenciando incrementos estacionarios, por otro lado la línea punteada (roja) representa un Proceso de Poisson No Homogéneo con una intensidad de $\lambda(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$, es decir es dependiente del tiempo, concentrando una mayor densidad de saltos en el periodo central del intervalo (simulando, por ejemplo, las horas pico de aperturas del refrigerador durante una jornada clínica). Ambas gráficas exhiben la naturaleza escalonada continua por la derecha con límites por la izquierda, por sus siglas en francés (càdlàg), propia de los procesos de saltos puros.

Las leyes de transición y la evolución temporal de las probabilidades de estado de la cadena $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ se encuentran completamente caracterizadas por la matriz de intensidades de transición $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Si definimos las funciones de probabilidad de transición condicional mediante $p_{ij}(h) = \mathbb{P}(\alpha(t+h) = j \mid \alpha(t) = i)$ para un incremento temporal positivo $h > 0$, las componentes de la matriz Q se determinan evaluando el límite analítico en el origen:

1. Para transiciones entre estados distintos ($i \neq j$), la componente q_{ij} representa la tasa instantánea o intensidad de conmutación desde el régimen i hacia el régimen j , definida como:

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0$$

2. Para los elementos situados sobre la diagonal principal ($i = j$), la componente q_{ii} representa la tasa neta de salida del estado i , cumpliendo por conservación de la probabilidad que la suma por filas de la matriz Q sea idénticamente nula:

$$q_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

A través de esta formulación basada en límites, las probabilidades de transición de primer orden quedan descritas mediante las expresiones $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$ para $i \neq j$, y $p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$. Esto permite modelar las conmutaciones macroscópicas de la dinámica del refrigerador sin necesidad de introducir variables temporales discretas ni heurísticas. Los lectores interesados en profundizar en las propiedades asintóticas y de estabilidad de estos procesos híbridos pueden remitirse al texto especializado de ([Asmussen 2003](#)).

2.2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y la Integral de Itô

Una vez establecidos los procesos estocásticos de soporte, es necesario definir las reglas operacionales que permiten construir y resolver ecuaciones sujetas a perturbaciones aleatorias continuas. Dado que las trayectorias del movimiento Browniano no son de variación acotada y tampoco son diferenciables en ningún punto, entonces la expresión clásica $dW(t)/dt$ no tiene sentido dentro del cálculo ordinario. Por lo tanto, la integración respecto a procesos estocásticos requiere la construcción de una nueva herramienta analítica conocida como la integral de Itô.

Definición 2.7 (Integral de Itô). Sea $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración Browniana $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ que satisface la condición de integrabilidad, i.e. $\mathbb{E} \left[\int_0^T X^2(t) dt \right] < \infty$. La integral de Itô de $X(t)$ respecto al proceso de Wiener $W(t)$ se define como el límite en media cuadrática de sumas de Riemann aproximadas por la izquierda:

$$\int_0^T X(t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad \text{en } L^2$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ es una partición del intervalo $[0, T]$ cuyo diámetro tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

A diferencia del cálculo clásico, evaluar el integrando estrictamente en el extremo izquierdo de cada subintervalo (t_i) garantiza que la integral resultante conserve la propiedad de martingala, lo que implica que su esperanza matemática es nula, i.e. $\mathbb{E} \left[\int_0^T X(t)dW(t) \right] = 0$. A partir de este concepto fundamental, se establece la formulación de una Ecuación Diferencial Estocástica (EDE).

Definición 2.8 (Ecuación Diferencial Estocástica). Una ecuación diferencial estocástica para un proceso $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ es una relación simbólica expresada en su forma diferencial mediante:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (2.1)$$

donde $b(t, X(t))$ denota el coeficiente de deriva y $\sigma(t, X(t))$ representa el coeficiente de difusión.

El término $dX(t)$ en la Ecuación 2.1 no debe interpretarse como una derivada ordinaria, sino como una representación abreviada de su ecuación integral equivalente:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad (2.2)$$

En la Ecuación 2.2, la primera integral respecto al tiempo es una integral ordinaria de Lebesgue-Stieltjes que captura la tendencia determinista del sistema, mientras que la segunda es una integral de Itô que modela el ruido estocástico continuo. Para una revisión rigurosa del cálculo estocástico elemental, se sugiere consultar a ([Karatzas y Shreve 1998](#)).

Para asegurar que una EDE posea una solución única ante cualquier condición inicial, los coeficientes de deriva y difusión deben cumplir ciertas condiciones, expuestas en el siguiente teorema de existencia y unicidad.

Teorema 2.1 (Teorema de Existencia y Unicidad). *Sea la EDE definida en la Ecuación 2.1 con una condición inicial $X(0) = X_0$ independiente del proceso de Wiener. Supóngase que para todo $t \in [0, T]$ y variables $x, y \in \mathbb{R}$, los coeficientes satisfacen las siguientes dos restricciones:*

1. **Condición de Lipschitz global:** *Existe una constante $K > 0$ tal que:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

2. **Condición de crecimiento lineal:** Existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

Bajo el cumplimiento de ambas condiciones, la ecuación tiene una solución fuerte única $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ con trayectorias continuas con probabilidad 1, una demostración a detalle de este teorema, basada en el método de aproximaciones sucesivas de Picard, se encuentra en ([Arnold 1974](#))

La condición de Lipschitz previene que las trayectorias colapsen de manera indeterminada, garantizando la unicidad, mientras que la restricción de crecimiento lineal evita que las soluciones diverjan a infinito en un tiempo finito.

2.3. El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico

Como paso previo al desarrollo de nuestro modelo termodinámico final, es indispensable introducir un tipo particular de EDE que modela la inercia física y la atracción hacia un estado de equilibrio: el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Definición 2.9 (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck). Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal homogénea:

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma dW(t) \tag{2.3}$$

donde $\kappa > 0$ representa la velocidad de reversión a la media, $\theta \in \mathbb{R}$ denota el nivel de equilibrio de largo plazo y $\sigma > 0$ es la volatilidad del sistema.

La característica principal de la Ecuación 2.3 radica en su deriva lineal $b(x) = \kappa(\theta - x)$. Cuando el estado del proceso supera el valor de equilibrio ($X(t) > \theta$), la deriva se vuelve negativa, empujando la trayectoria hacia abajo; inversamente, si el proceso se encuentra por debajo del nivel de consigna ($X(t) < \theta$), la deriva se vuelve positiva, con lo cual hay un crecimiento hacia el promedio. Esta propiedad de atracción convierte a este proceso en la base ideal para simular la oscilación térmica de sistemas cerrados regidos por la ley de enfriamiento de Newton, cuyas propiedades analíticas detalladas se discuten en ([Karlin y Taylor 1998](#)).

2.4. Formulación de la Ecuación Diferencial Estocástica General

Una vez definidos los elementos estocásticos elementales, es posible formular el marco matemático que une la evolución analítica continua con las perturbaciones aleatorias y los saltos discretos. De acuerdo con el marco general desarrollado por (Yin y Zhu 2010) y (Platen y Bruti-Liberati 2010), una Difusión Híbrida con Conmutación de Régimen y Saltos se define mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dT(t) = \mu(T(t), \alpha(t))dt + \sigma(T(t), \alpha(t))dW(t) + \gamma(T(t^-), \alpha(t^-))dN(t) \quad (2.4)$$

En la Ecuación 2.4, el término $T(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} T(s)$ preserva la propiedad de continuidad por la izquierda con límites por la derecha (càdlàg) del proceso ante la ocurrencia de un salto. Las funciones de coeficientes se definen como:

$$\mu : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Coeficiente de deriva o tendencia})$$

$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Coeficiente de difusión o volatilidad})$$

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Magnitud o intensidad del impacto del salto})$$

La incorporación con la cadena de Markov $\alpha(t)$ indica que los parámetros estructurales del sistema cambian de forma aleatoria e instantánea cuando el entorno conmuta de estado.

Para ilustrar el impacto de nuestra formulación matemática sobre el modelado físico de la red de frío, es fundamental contrastar el comportamiento de las trayectorias resultantes. La simulación numérica del modelo revela cómo la incorporación de discontinuidades captura fenómenos que los modelos clásicos omiten.

Como muestra la Figura 2.3, al modelar el sistema exclusivamente con componentes difusivos continuos se subestima el riesgo de trayectorias térmicas fuera del rango normativo de la OMS (2 °C a 8 °C). La inclusión del proceso de saltos justifica nuestra necesidad de utilizar el Lema de Itô generalizado, ya que la temperatura experimenta cambios finitos instantáneos que rompen la diferenciabilidad clásica del modelo.

2.5. El Modelo Estocástico de Red de Frío (Ornstein-Uhlenbeck Modificado)

Pasando a la física de nuestro problema particular, adaptamos la Ecuación 2.4 bajo una estructura termodinámica de reversión a la media. Trabajaremos bajo la hipótesis de que el comportamiento de la temperatura interna $T(t)$ de un refrigerador institucional de vacunas se rige por la siguiente ecuación diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck híbrida con saltos de Poisson:

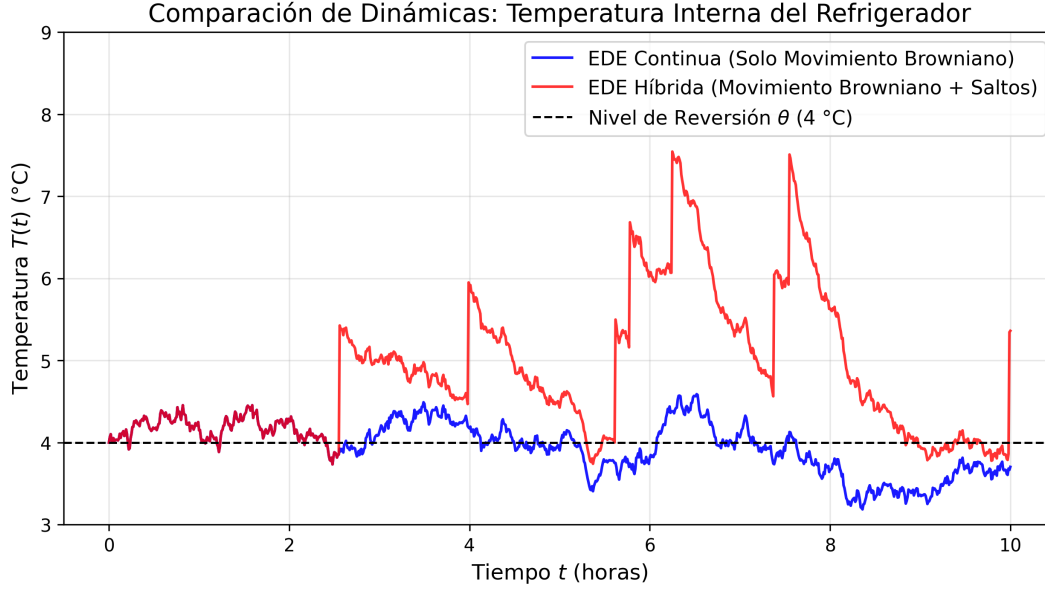


Figura 2.3: Trayectorias simuladas de la Ecuación Diferencial Estocástica de Ornstein-Uhlenbeck para la temperatura interna de un refrigerador de vacunas. El eje horizontal representa el tiempo de observación en un horizonte de $T = 10.0$ horas con incrementos de $dt = 0.01$. La línea base negra indica la temperatura óptima $\theta = 4^\circ\text{C}$. La trayectoria continua (azul) ilustra una difusión clásica perturbada únicamente por el movimiento Browniano $dW(t)$, simulando las microfluctuaciones gaussianas del ciclo del compresor. Por otro lado, la trayectoria híbrida (roja) añade perturbaciones mediante un proceso de Poisson $dN(t)$, modelando impactos macroscópicos. Se observa claramente cómo los saltos térmicos positivos (simulando aperturas de la puerta por el personal) elevan bruscamente la temperatura, la cual posteriormente experimenta una reversión a la media controlada por el parámetro κ . Las trayectorias fueron aproximadas computacionalmente mediante el método de Euler-Maruyama, que presentaremos más adelante.

$$dT(t) = \kappa(\alpha(t))[\theta(\alpha(t)) - T(t)]dt + \sigma(\alpha(t))dW(t) + \gamma dN(t) \quad (2.5)$$

Bajo esta parametrización particular, el espacio de estados de la cadena de Markov se restringe a dos regímenes operativos fundamentales, $\mathcal{M} = \{1, 2\}$, cuyas implicaciones físicas y estocásticas se detallan en los siguientes conceptos:

Definición 2.10 (Inercia Térmica y Parámetros Estructurales). La inercia térmica es la capacidad de la masa interna del refrigerador (biológicos, paquetes refrigerantes y botellas de agua) para amortiguar la transferencia de calor del exterior. En la Ecuación 2.5, se modela mediante el coeficiente de velocidad de reversión $\kappa(\alpha(t)) > 0$. A mayor inercia térmica, menor será el valor de κ en ausencia de energía eléctrica, retrasando el calentamiento del refrigerador. El parámetro de volatilidad $\sigma(\alpha(t)) > 0$ mide el ruido continuo gaussiano inducido por el ciclo del compresor.

Definición 2.11 (Corte de Energía (Conmutación de Régimen)). Se define como la transición de la cadena de Markov debido a fallos en el suministro eléctrico. El sistema conmuta del régimen con suministro normal ($\alpha(t) = 1$) al régimen de falla ($\alpha(t) = 2$). Esta conmutación altera los límites asintóticos de la deriva en la Ecuación 2.5:

1. **Régimen $\alpha(t) = 1$:** El sistema converge a la temperatura ideal del termostato, es decir, $\theta(1) = 4^\circ\text{C}$.
2. **Régimen $\alpha(t) = 2$:** Al apagarse el motor, el sistema interrumpe el enfriamiento y la temperatura interna comienza a subir hacia la temperatura ambiente exterior del centro de salud, parametrizada por $\theta(2) = T_{\text{amb}}$.

Definición 2.12 (Apertura de Puertas (Perturbaciones por Saltos)). Corresponde a la entrada brusca de aire cálido exterior provocada por la manipulación operativa del personal de enfermería. Este fenómeno ocurre de forma intermitente y se modela en la Ecuación 2.5 mediante el término de saltos $\gamma dN(t)$, donde $\gamma > 0$ representa el incremento térmico discreto e instantáneo en grados Celsius cada vez que el diferencial del proceso de Poisson registra un evento ($dN(t) = 1$).

2.6. El Lema de Itô Clásico y Generalizado

Para realizar transformaciones algebraicas sobre funciones que dependen de procesos estocásticos o para desarrollar algoritmos de aproximación computacional válidos, el teorema fundamental del cálculo determinista debe sustituirse por el Lema de Itô. Introducimos inicialmente la versión elemental para difusiones continuas.

Teorema 2.2 (Lema de Itô para Difusiones Continuas). *Sea $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, considere la EDE dada por la Ecuación 2.1, con condición inicial $X(0) = x_0$, y sea $V(t, x)$ una función escalar continuamente diferenciable en su componente temporal t y dos veces continuamente diferenciable en su componente espacial x . El diferencial estocástico de la función compuesta viene dado por:*

$$dV(t, X(t)) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + b(t, X(t)) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dt + \sigma(t, X(t)) \frac{\partial V}{\partial x} dW(t)$$

El término de segundo orden respecto a la derivada espacial surge de la propiedad cuadrática del movimiento Browniano, donde $(dW(t))^2 \rightarrow dt$ en un sentido probabilístico. Este desarrollo elemental se detalla conceptualmente en (Karatzas y Shreve 1998).

No obstante, dado que nuestro modelo usa conmutaciones estructurales discretas y discontinuidades puntuales, la versión continua resulta insuficiente. Apoyados en los desarrollos de (Yin y Zhu 2010) y (Platen y Bruti-Liberati 2010), establecemos el siguiente teorema analítico que rige el cálculo sobre trayectorias discontinuas con conmutación:

Teorema 2.3 (Fórmula de Itô para Difusiones Híbridas con Saltos). *Sea $V(t, T, i)$ una función continuamente diferenciable en su componente temporal t , y dos veces continuamente diferenciable en su componente espacial T para cada régimen operativo $i \in \mathcal{M}$. Si $T(t)$ es un proceso que satisface la Ecuación 2.4, entonces el diferencial estocástico de la función compuesta $V(t, T(t), \alpha(t))$ viene dado por:*

$$\begin{aligned} dV(t, T(t), \alpha(t)) = & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial T} \mu(T, \alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \sigma^2(T, \alpha) + \sum_{j \in \mathcal{M}} q_{\alpha(t)j} V(t, T, j) \right] dt \\ & + \frac{\partial V}{\partial T} \sigma(T, \alpha) dW(t) + [V(t, T(t^-) + \gamma, \alpha(t^-)) - V(t, T(t^-), \alpha(t^-))] dN(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como se puede apreciar en el Teorema 2.3, el operador diferencial de Itô se logra expandir. El primer término entre corchetes añade a la derivada temporal y al generador de difusión clásico una sumatoria ponderada por las tasas de transición q_{ij} de la matriz Q , lo cual captura el efecto del cambio en la deriva. Por su parte, la componente final sustituye la derivada espacial tradicional por un operador de diferencias finitas encargado de absorber la discontinuidad en los tiempos de salto del proceso de Poisson.

2.7. Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En la práctica, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas carecen de una solución analítica explícita debido a la no linealidad de sus coeficientes o al acoplamiento de

sus perturbaciones. Por este motivo, resulta necesario recurrir a esquemas de aproximación numérica distribuidos en un mallado temporal discreto. A diferencia del cálculo determinista, donde la convergencia se evalúa de forma puntual, en el ámbito estocástico la cercanía entre la solución real $X(t)$ y la aproximación discreta Y_n requiere criterios fundamentados en la teoría de la medida.

Para definir los criterios de convergencia, consideremos una partición regular del intervalo de tiempo $[0, T]$ con un tamaño de paso constante $\Delta t = \frac{T}{N}$, fijando los nodos temporales como $t_n = n\Delta t$ para cada paso $n = 0, 1, \dots, N$. Denotaremos a la solución aproximada en el nodo t_n como $Y_n = Y(t_n)$.

Definición 2.13 (Convergencia Fuerte). Se dice que una aproximación discreta Y converge fuertemente de orden $\gamma > 0$ hacia la solución real $X(T)$ en el tiempo terminal T si existe una constante positiva C , independiente de Δt , tal que se cumple la desigualdad:

$$\mathbb{E}[|X(T) - Y_N|] \leq C(\Delta t)^\gamma$$

La convergencia fuerte evalúa el error promedio directo sobre cada trayectoria individual del proceso. Es el criterio adecuado cuando interesa simular caminos muestrales específicos del sistema.

Definición 2.14 (Convergencia Débil). Se dice que una aproximación discreta Y converge débilmente de orden $\beta > 0$ hacia la solución real $X(T)$ en el tiempo terminal T si, para toda función de prueba $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable de crecimiento polinomial, existe una constante positiva C tal que:

$$|\mathbb{E}[g(X(T))] - \mathbb{E}[g(Y_N)]| \leq C(\Delta t)^\beta$$

La convergencia débil no compara trayectoria por trayectoria, sino que evalúa la aproximación de la distribución de probabilidad global y sus momentos estadísticos (como la media y la varianza), para más detalles consultar a ([Kloeden y Platen 1992](#)).

2.7.1. Esquema Numérico de Euler-Maruyama

El método de Euler-Maruyama constituye la extensión estocástica más elemental del método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias. Este esquema aproxima el cambio continuo truncando las integrales de la ecuación mediante aproximaciones de orden inferior.

Teorema 2.4 (Teorema de Convergencia de Euler-Maruyama). *Sea $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, considere la EDE dada por la Ecuación 2.1, con condición inicial $X(0) = x_0$, si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad Teorema 2.1 y los coeficientes b y de difusión σ son continuamente diferenciables, entonces el esquema de Euler-Maruyama converge fuertemente con orden:*

$$\gamma = 0.5$$

y converge débilmente con un orden de acotación de $\beta = 1.0$.

Este orden de convergencia se fundamenta en que el incremento del movimiento Browniano domina algebraicamente sobre el incremento del tiempo determinista, dado que su escala de variación es proporcional a $\sqrt{\Delta t}$, la demostración de este teorema se encuentra en (Kloeden y Platen 1992).

Algoritmo General de Euler-Maruyama

Para aproximar numéricamente las trayectorias de la ecuación en el intervalo $[0, T]$ con condición inicial $X(0) = x_0$:

1. Inicialización:

- Fijar el número de pasos N y calcular el incremento $\Delta t = T/N$.
- Construir la malla temporal $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, 1, \dots, N$.
- Asignar el valor inicial a la primera posición del vector: $Y_0 = x_0$.

2. Bucle de Simulación: Para cada paso temporal $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

- Generar una variable aleatoria normal estándar independiente: $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Calcular el incremento del proceso de Wiener mediante el escalamiento:

$$\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) = Z_n \sqrt{\Delta t}$$

- Actualizar el estado del proceso en el siguiente nodo evaluando la relación recursiva:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n$$

3. Resultado: El vector de estados discreto $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$ representa la trayectoria simulada aproximada del proceso.

2.7.2. Esquema Numérico de Milstein

El método de Milstein es un esquema numérico avanzado de orden superior que corrige la aproximación de la componente difusiva. Surge de aplicar de manera explícita el Lema de Itô al integrando de la componente estocástica en la expansión de Taylor-Itô, rescatando los términos de segundo orden que el método de Euler-Maruyama ignora.

Teorema 2.5 (Teorema de Convergencia de Milstein). *Sea $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, considere la EDE dada por la Ecuación 2.1 sujeta a las condiciones estándar de regularidad, es decir si los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son dos veces continuamente diferenciables respecto a sus componentes y cumplen los criterios de crecimiento acotado, entonces el esquema numérico de Milstein converge fuertemente con un orden superior dado por:*

$$\gamma = 1.0$$

El incremento en la velocidad de convergencia fuerte se logra al incorporar de forma analítica el término correspondiente a la integral estocástica iterada

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW(u) dW(s) = \frac{1}{2} [(\Delta W_n)^2 - \Delta t],$$

la cual modela la curvatura interna del ruido estocástico dentro del intervalo de simulación, lo que permite una aproximación más precisa de la trayectoria. La demostración de este resultado se encuentra en (Kloeden y Platen 1992).

Algoritmo General de Milstein

Para aproximar numéricamente las trayectorias bajo el refinamiento de segundo orden estocástico en el intervalo $[0, T]$ con condición inicial $X(0) = x_0$:

1. Inicialización:

- Establecer el número de intervalos N y calcular el paso $\Delta t = T/N$.
- Definir los puntos de la malla $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, 1, \dots, N$.
- Asignar la condición de inicio del proceso: $Y_0 = x_0$.

2. Bucle de Simulación: Para cada paso temporal $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

- Obtener una realización independiente de una variable normal estándar: $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Establecer el incremento browniano escalar correspondientemente: $\Delta W_n = Z_n \sqrt{\Delta t}$.

- Calcular analíticamente el valor de la primera derivada parcial del coeficiente de difusión respecto a la variable espacial evaluado en el punto actual:

$$\sigma'(t_n, Y_n) = \left. \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x} \right|_{(t_n, Y_n)}$$

- Realizar la actualización recursiva del estado integrando la corrección de segundo orden:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma(t_n, Y_n)\sigma'(t_n, Y_n)[(\Delta W_n)^2 - \Delta t]$$

3. **Resultado:** El conjunto ordenado de aproximaciones numéricas $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$ conforma la trayectoria analizada bajo estabilidad de orden superior.

2.8. Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte

Para mostrar la diferencia analítica que hay entre los esquemas de Euler-Maruyama y Milstein, y justificar la necesidad de utilizar este último cuando se requiere precisión en trayectorias individuales, planteamos un problema de control numérico. Consideremos el Movimiento Browniano Geométrico (GBM), una EDE lineal homogénea caracterizada por un coeficiente de difusión multiplicativo, dada por la ecuación:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (2.7)$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, tendencia determinista $\mu > 0$ y volatilidad $\sigma > 0$. Este proceso posee una solución analítica única dada por:

$$X(t) = X_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right]$$

Esta forma cerrada nos permite contrastar directamente las aproximaciones numéricas contra la realidad del proceso. La principal limitación del método de Euler-Maruyama radica en su coeficiente de difusión constante en cada paso temporal. Al truncar la integral estocástica con un orden de convergencia fuerte de 0.5, el esquema no absorbe correctamente la curvatura del ruido multiplicativo (σX_t), acumulando errores significativos sobre las trayectorias individuales, incluso ante mallados temporales relativamente pequeños. Por el contrario, el método de Milstein integra el término de segundo orden estocástico, logrando que el vector de estados discreto coincida con mayor precisión con la dinámica real del proceso ([Kloeden y Platen 1992](#)).

En la Figura 2.4, simulamos una trayectoria de GBM en un horizonte temporal acotado ($T = 2.0$ años) con una volatilidad alta ($\sigma = 1$) y un tamaño de paso discreto relativamente grueso

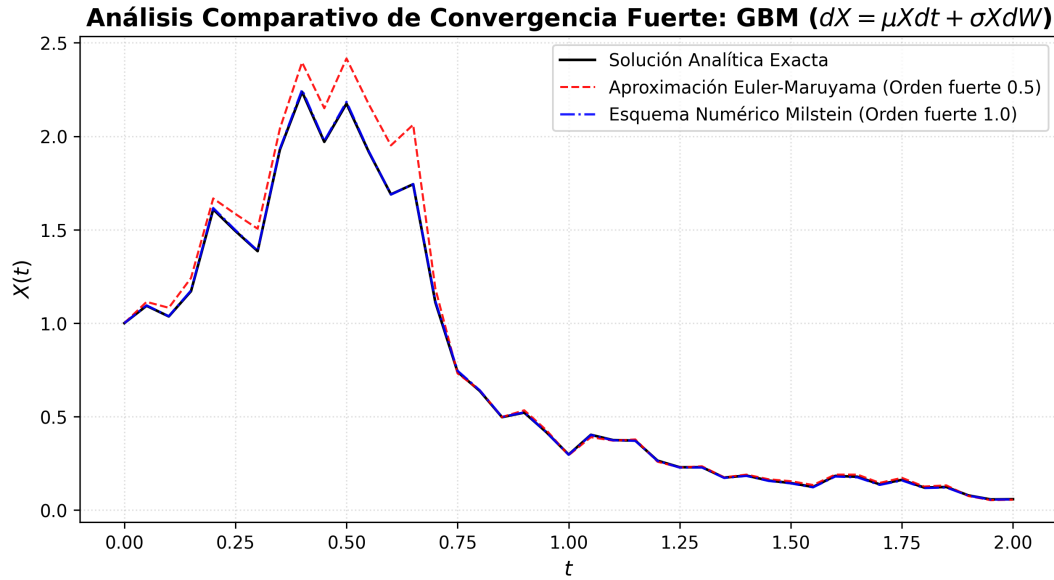


Figura 2.4: Análisis de convergencia fuerte de esquemas numéricos estocásticos para una trayectoria de Movimiento Browniano Geométrico (GBM) definida por $dX = 0.05Xdt + XdW$ con $X_0 = 1$. El eje horizontal representa el tiempo discreto y el eje vertical el estado del proceso $X(t)$. La línea negra continua muestra la solución analítica exacta. La línea roja discontinua ilustra la aproximación de Euler-Maruyama (Orden fuerte 0.5), evidenciando desviaciones significativas respecto a la trayectoria real. La línea azul discontinua-punto representa el esquema de Milstein (Orden fuerte 1.0), el cual sigue con alta precisión la dinámica exacta, demostrando su estabilidad superior ante ruidos multiplicativos y mallados temporales gruesos. La fuente de los datos corresponde a una simulación de elaboración propia generada en Python.

($\Delta t = 0.05$, correspondiente a $N = 40$ pasos). Esta configuración es deliberada para resaltar las fallas de los aproximadores.

Como se puede apreciar en la Figura 2.4, la trayectoria roja que correspondiente al método de Euler-Maruyama falla en aproximar la dinámica exacta (línea negra), presentando oscilaciones exageradas y alejándose del valor real a medida que el tiempo avanza. Por otro lado, la trayectoria azul del método de Milstein sigue prácticamente de forma idéntica la trayectoria real. Esta diferencia justifica nuestra decisión de utilizar el esquema numérico de Milstein para simular el comportamiento térmico del refrigerador HBC-150, ya que el modelo híbrido presenta un coeficiente de ruido continuo $\sigma(\alpha(t))$, lo cual genera perturbaciones multiplicativas que requieren un orden de convergencia estricto para no subestimar el riesgo de trayectorias erráticas.

Parte II

Modelo Matemático

3 Estudio de Caso: Calibración Termodinámica, Eléctrica y Cinética de Degradación

3.1. Motivación y Contexto del Estudio

El presente capítulo consolida el marco teórico desarrollado previamente, trasladándolo de una formulación matemática abstracta a un escenario de aplicación altamente crítico: la red de frío para la preservación de vacunas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. La elección de esta región geográfica como caso de estudio se debe a la combinación de condiciones climatológicas de calor extremo y a la vulnerabilidad de la infraestructura eléctrica local ante fenómenos meteorológicos. Bajo este entorno, los refrigeradores institucionales que resguardan los biológicos de alto valor inmunológico operan bajo condiciones de estrés continuo.

Para garantizar la validez y la utilidad del modelo computacional, se evitara la parametrización arbitraria de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE). Un modelo probabilístico con tasas de intensidad o volatilidades carentes de fundamento físico produciría trayectorias desconectadas de la realidad operativa. Por consiguiente, el objetivo central de este capítulo es la calibración rigurosa de las variables del sistema.

El proceso de estimación y asignación de parámetros se desarrollará en las siguientes tres fases analíticas:

1. **Caracterización Estocástica del Suministro Eléctrico:** Mediante el análisis de datos oficiales de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), se modelará la frecuencia y la duración de las interrupciones del servicio eléctrico. Estas estimaciones permitirán estructurar la conmutación de la cadena de Markov y los Procesos de Poisson No Homogéneos acoplados a la ecuación.
2. **Calibración Termodinámica del Equipo Operativo:** A partir de las especificaciones técnicas y requerimientos normados por la Organización Mundial de la Salud (OMS), se deducirán analíticamente los coeficientes de reversión a la media (κ) y las volatilidades térmicas (σ) que dictan el enfriamiento activo y la inercia pasiva del refrigerador de estudio.
3. **Cinética de Degradación Biológica:** Finalmente, se vinculara el comportamiento térmico dada por la EDE con la Ecuación de Arrhenius, estableciendo el marco cuantitativo necesario para evaluar la pérdida de viabilidad farmacológica que sufren las vacunas durante algun fallo.

3.2. Datos Base e Histórico de Interrupciones Eléctricas

El objetivo de esta fase es modelar la tasa de ocurrencia y la escala temporal de las interrupciones del suministro eléctrico en el área geográfica de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Para evitar supuestos teóricos alejados de la realidad operativa de la red local, los datos de partida no se asignaron de manera arbitraria, sino que se obtuvieron a través de los registros oficiales de la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Mediante una solicitud de información pública de transparencia dirigida a la CFE, se obtuvo el registro histórico del promedio mensual de interrupciones y su duración para el municipio de Tuxtla Gutiérrez.

A partir de dicha solicitud, se recabó el comportamiento histórico del municipio para el periodo comprendido entre los años 2019 y 2025. La Tabla 3.1 contiene dicha información, presentando el número de interrupciones promedio por mes y la duración promedio en horas por cada corte de energía.

Tabla 3.1: Interrupciones eléctricas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas (Fuente: Solicitud de Transparencia a la CFE).

Año	Número de interrupciones promedio por mes	Duración Promedio de las interrupciones (Horas)
2019	25	2.02
2020	42	1.73
2021	47	2.03
2022	40	2.59
2023	49	2.23
2024	43	2.39
2025	38	2.02

El análisis de la Tabla 3.1 muestra un incremento significativo en la frecuencia de fallas a partir del año 2020, estabilizándose en una franja superior a los 40 cortes mensuales. Este cambio se debe al crecimiento de la carga térmica residencial e industrial y a la saturación de los transformadores de distribución en la mancha urbana.

Para la calibración de la EDE en este trabajo de investigación, se seleccionó el año **2024** como el escenario de línea base. Dicho año presenta una media mensual de **43 interrupciones por mes** con una duración promedio por corte de **2.39 horas**. Al proyectar esta tasa mensual a una tasa anual, se tiene que el número total de interrupciones al año esperadas a nivel municipal (N_{total}) es:

$$N_{total} = 43 \text{ cortes/mes} \times 12 \text{ meses} = 516 \text{ cortes/año} \quad (3.1)$$

3.3. Corrección de Escala Espacial (Factor κ_{espacial})

3.3.1. Justificación de la Reducción de Escala

El valor de 516 cortes al año obtenido en la Ecuación 3.1 es un dato agregado de todo el municipio. En la modelación aplicada, utilizar directamente este valor para un solo refrigerador implicaría asumir que el edificio clínico sufre más de un apagón diario, lo cual no es físicamente real. Este error ocurre al ignorar que un edificio está conectado a un solo nodo de la red, no a todos simultáneamente.

Para solucionar esto, introducimos un factor de escala espacial. De acuerdo con el Programa para el Desarrollo del Sistema Eléctrico Nacional (PRODESEN) y los diagramas de infraestructura del Centro Nacional de Control de Energía (CENACE) ([Secretaría de Energía 2024](#)), la mancha urbana de Tuxtla Gutiérrez está alimentada de manera sectorizada por exactamente **8 subestaciones principales** de distribución (Tuxtla Céntrica, Oriente, Poniente, Terán, Tuxtla Norte, Tuxtla Dos, Mactumatzá y Real del Bosque).

3.3.2. La Esperanza Matemática Local

Asumiendo que las fallas de transmisión se distribuyen de manera uniforme sobre estas infraestructuras mediante el principio de razón insuficiente de Laplace, la probabilidad p de que un evento afecte a la subestación de interés (Tuxtla Norte, encargada de alimentar la zona de hospitales y laboratorios de la Colonia Maya) es $p = 1/8$.

Por consiguiente, el número de cortes que absorbe la clínica local se comporta como una variable aleatoria binomial $N_{\text{local}} \sim \mathcal{B}(N_{\text{total}}, p)$, cuya esperanza matemática es:

$$\mathbb{E}[N_{\text{local}}] = \frac{516 \text{ cortes}}{8 \text{ subestaciones}} = 64.5 \approx 64 \text{ cortes al año} \quad (3.2)$$

Al ajustar al entero más cercano para mantener la naturaleza discreta de los eventos, establecemos una base realista de **64 interrupciones esperadas al año** para nuestra simulación.

3.4. Distribución Temporal de las Fallas

Las interrupciones no ocurren de manera homogénea a lo largo del año (es decir, no se presentan exactamente 5.33 cortes idénticos cada mes). La variabilidad mensual depende directamente de los factores climáticos estacionales de la región. Para no asignar los apagones de manera aleatoria, utilizamos el comportamiento documentado en el *Informe Anual de la CFE 2024* ([Comisión Federal de Electricidad 2024](#)), específicamente en su página 82, donde se registra la evolución de los indicadores de continuidad del servicio a lo largo de los meses.

Para comprender la estructura de estos datos oficiales, la CFE evalúa la continuidad del suministro a través de dos indicadores internacionales de confiabilidad:

3.4.1. 1. Índice de la Frecuencia de Interrupción Promedio, en número (SAIFI)

El indicador SAIFI (*System Average Interruption Frequency Index*) contabiliza el número promedio de interrupciones sostenidas que experimenta un usuario durante un periodo determinado (generalmente un año o un mes), es decir si se tiene una red eléctrica con un total de N_T usuarios atendidos. Si en un intervalo de observación ocurren M eventos de interrupción, donde cada evento $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ afecta a una cantidad de N_i usuarios, el índice SAIFI se expresa formalmente como:

$$\text{SAIFI} = \frac{\sum_{i=1}^M N_i}{N_T} \quad (3.3)$$

3.4.2. 2. Índice de Duración Promedio de Interrupción, en minutos (SAIDI)

El indicador SAIDI (*System Average Interruption Duration Index*) mide la duración total acumulada de las interrupciones sostenidas que experimenta el usuario promedio dentro del periodo de evaluación. Si cada evento de falla i tiene una duración temporal de r_i horas, el índice SAIDI se define analíticamente mediante:

$$\text{SAIDI} = \frac{\sum_{i=1}^M N_i r_i}{N_T} \quad (3.4)$$

A partir de estas definiciones, la Tabla 3.2 presenta la evolución mensual acumulada de los indicadores SAIDI y SAIFI reportada en la página 82 del informe de la CFE.

Tabla 3.2: Evolución mensual acumulada de los indicadores SAIDI y SAIFI (Fuente: Informe Anual CFE 2024, p. 82).

Mes	SAIDI Acumulado (Horas)	SAIFI Acumulado
Enero	0.998	0.013
Febrero	1.110	0.017
Marzo	1.285	0.022
Abril	2.793	0.027
Mayo	4.120	0.037
Junio	5.774	0.053
Julio	6.557	0.065
Agosto	7.905	0.080

Mes	SAIDI Acumulado (Horas)	SAIFI Acumulado
Septiembre	8.592	0.096
Octubre	9.063	0.103
Noviembre	9.314	0.106
Diciembre	10.812	0.113

Dado que el informe de la CFE publica el indicador SAIFI de forma acumulada, es necesario calcular la diferencia marginal (Δ) respecto al mes anterior para aislar el peso estadístico de cada mes de forma individual:

$$\Delta\text{SAIFI}_i = \text{SAIFI}_i - \text{SAIFI}_{i-1} \quad (3.5)$$

Para distribuir los 64 cortes anuales calculados para la subestación local respetando esta estacionalidad, aplicamos una regla de tres simple basada en la proporcionalidad marginal. Suponiendo que el valor total del SAIFI al final del año (0.113) representa el 100 % de las fallas (equivalente a los 64 cortes), entonces el incremento mensual generado en cada periodo (ΔSAIFI_i) representará una fracción directamente proporcional de cortes. Expresado de forma general para cualquier mes i , la asignación viene dada por:

$$\text{Cortes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIFI}_i}{\text{SAIFI}_{total}} \right) \times \mathbb{E}[N_{local}] \quad (3.6)$$

Sustituyendo los valores de nuestro escenario ($\text{SAIFI}_{total} = 0.113$ y $\mathbb{E}[N_{local}] = 64$), la ecuación del modelo es:

$$\text{Cortes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIFI}_i}{0.113} \right) \times 64 \quad (3.7)$$

Al hacer este cálculo y redondeando al entero más cercano (realizando un ajuste para mantener la conservación de la suma total en 64), obtenemos la distribución estacional empírica de fallas presentada en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Distribución estacional de los 64 cortes locales calculada mediante proporcionalidad sobre el SAIFI 2024.

Mes	Δ SAIFI (Mensual)	Cortes Exactos Calculados	Cortes Asignados (Redondeo)
Enero	0.013	7.36	7
Febrero	0.004	2.26	2
Marzo	0.005	2.83	3

Mes	Δ SAIFI (Mensual)	Cortes Exactos Calculados	Cortes Asignados (Redondeo)
Abril	0.005	2.83	3
Mayo	0.010	5.66	6
Junio	0.016	9.06	9
Julio	0.012	6.79	7
Agosto	0.015	8.49	8
Septiembre	0.016	9.06	9
Octubre	0.007	3.96	4
Noviembre	0.003	1.70	2
Diciembre	0.007	3.96	4

El análisis de la Tabla 3.3 revela con claridad los dos momentos estacionales de mayor vulnerabilidad y frecuencia de cortes en el suministro eléctrico de la región. El pico más severo se registra en **Junio (9 cortes)**, un fenómeno ocasionado por las altas temperaturas extremas registradas en Tuxtla Gutiérrez durante la primavera-verano, las cuales provocaron una saturación en la red de distribución eléctrica debido al uso masivo y simultáneo de sistemas de aire acondicionado. El segundo periodo crítico ocurre durante **Agosto y Septiembre (8 y 9 cortes respectivamente)**, coincidiendo directamente con el máximo histórico de la temporada de lluvias, tormentas tropicales y huracanes en el Sureste mexicano, eventos climáticos que suelen derribar líneas de alta tensión y afectar transformadores locales. En contraste, la época invernal se consolida como el periodo de máxima estabilidad en el servicio.

3.5. Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH)

Para integrar estas interrupciones eléctricas dentro de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) en tiempo continuo t , donde $t \in [0, 365]$ representa los días del año, utilizamos un **Proceso de Poisson No Homogéneo**, cuya intensidad instantánea de eventos $\lambda(t)$ varía en función del tiempo para absorber la estacionalidad climática.

El modelo se construye mediante la suma de una tasa base constante y dos funciones de perturbación gaussianas no normalizadas. La elección de núcleos gaussianos obedece a dos razones analíticas fundamentales:

1. **Transición Teórica Suave:** Los fenómenos climáticos (como una ola de calor o la época de huracanes) no inician ni terminan de forma abrupta. Una gaussiana permite modelar la transición gradual de las estaciones sin introducir discontinuidades de salto que volverían inestable la resolución numérica de la EDE.
2. **Correlación Física Estacional:** Permite alinear y concentrar el mayor riesgo de que la EDE salte al estado de falla eléctrica (apagón) exactamente en los días donde el clima ambiental exterior es más adverso.

La función analítica propuesta para la intensidad diaria de fallas es:

$$\lambda(t) = \lambda_{base} + A_1 \exp\left(-\frac{(t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{(t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

Para calibrar estos coeficientes con los datos empíricos de Tuxtla Gutiérrez (2024), se realiza el siguiente desglose analítico:

- **Tasa Base** ($\lambda_{base} = 0.0667$): Representa el riesgo mínimo de fondo debido a fallas fortuitas o mantenimiento de la red, independiente del clima. Se calcula desde los meses más estables (febrero y noviembre, con 2 cortes al mes). Al dividir este valor, obtenemos la tasa diaria:

$$\lambda_{base} = \frac{2 \text{ cortes}}{30 \text{ días}} \approx 0.0667 \text{ cortes/día}$$

- **Medias Temporales** ($\mu_1 = 152$ y $\mu_2 = 244$): Ubican el centro máximo de los picos de riesgo. El primer pico se centra a **principios de junio** (el 1 de junio equivale al día 152 del año), alineándose con el inicio del verano más caluroso. El segundo se centra a **inicios de septiembre** (día 244), el momento históricamente más activo de la temporada de huracanes.
- **Amplitudes** ($A_1 = 0.2333$ y $A_2 = 0.2333$): Capturan la altura máxima de la campana en los días críticos. Como junio y septiembre registraron 9 cortes mensuales, la tasa en su pico es de $9/30 = 0.30$ cortes/día. Dado que la tasa base ya aporta 0.0667, la magnitud neta que debe sumar la gaussiana es la diferencia: $0.30 - 0.0667 = 0.2333$.
- **Varianzas Estacionales** ($\sigma_1 = 40$ y $\sigma_2 = 30$): Controlan el ancho temporal de las afectaciones. Para la ola de calor, se asigna una desviación estándar de 40 días (varianza $2\sigma_1^2 = 3200$) para garantizar que la campana sea lo suficientemente ancha como para cubrir desde finales de abril (cuando inician las altas temperaturas) hasta mediados de julio. Para las lluvias, una desviación estándar de 30 días (varianza $2\sigma_2^2 = 1800$) modela una perturbación que cubre por completo agosto y septiembre, extendiéndose hacia octubre.

Sustituyendo cada coeficiente calibrado, la función de intensidad operativa queda definida formalmente como:

$$\lambda(t) = 0.0667 + 0.2333 \exp\left(-\frac{(t - 152)^2}{3200}\right) + 0.2333 \exp\left(-\frac{(t - 244)^2}{1800}\right)$$

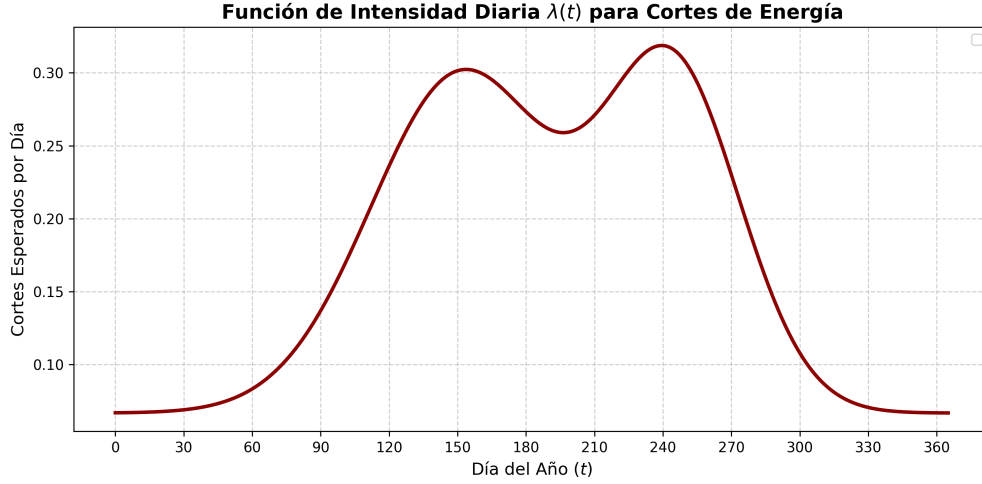


Figura 3.1: Función de intensidad diaria de fallas eléctricas $\lambda(t)$. El modelo superpone al ruido constante de fondo dos núcleos gaussianos anchos que abarcan los momentos más críticos del año: la temporada de estiaje y calor extremo ($\mu_1 = 152$, $\sigma_1 = 40$) y la temporada de tormentas tropicales ($\mu_2 = 244$, $\sigma_2 = 30$).

3.6. Validación del Modelo (Cálculo Integral)

Por los fundamentos de los Procesos de Poisson No Homogéneos, el número esperado de eventos en cualquier intervalo $(t_1, t_2]$ está determinado por la integral definida de su función de intensidad:

$$\mathbb{E}[N(t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$$

Para validar la consistencia analítica de nuestra función $\lambda(t)$, particionamos el año de 365 días en 12 subintervalos (correspondientes a los días acumulados de cada mes) y resolvemos numéricamente sus respectivas integrales, contrastando el área teórica bajo la curva contra los objetivos empíricos de la CFE:

Tabla 3.4: Validación de Valores Esperados por Integral vs. Datos Empíricos de la CFE 2024.

Mes	Intervalo de Integración $[t_{i-1}, t_i]$	Objetivo Empírico (CFE)	Esperanza Integral $\mathbb{E}[N]$
Enero	[0, 31]	7	2.10
Febrero	[31, 59]	2	2.06
Marzo	[59, 90]	3	3.26
Abril	[90, 120]	3	5.56

Mes	Intervalo de Integración $[t_{i-1}, t_i]$	Objetivo Empírico (CFE)	Esperanza Integral $\mathbb{E}[N]$
Mayo	[120, 151]	6	8.56
Junio	[151, 181]	9	8.75
Julio	[181, 212]	7	8.16
Agosto	[212, 243]	8	9.40
Septiembre	[243, 273]	9	8.29
Octubre	[273, 304]	4	4.63
Noviembre	[304, 334]	2	2.38
Diciembre	[334, 365]	4	2.10

La suma acumulada de las 12 integrales definidas a lo largo de todo el dominio anual arrojó un valor total de **65.25 eventos esperados**. Al comparar este resultado con la meta de 64 cortes empíricos, se observa que el modelo añade, en promedio, una falla anual extra.

Esta desviación hacia arriba es una decisión metodológica deliberada para blindar la simulación de Montecarlo: al ensanchar las campanas de riesgo para cubrir desde abril hasta octubre de manera ininterrumpida, el modelo genera un escenario ligeramente más **conservador y severo** que la simple estadística aislada. Esto garantiza que las proyecciones de estrés térmico sobre la red de frío no subestimen el peligro real al que estarán sometidos los biológicos de la OMS durante las estaciones críticas en Tuxtla Gutiérrez.

3.7. Distribución Log-Normal de las Duraciones de las Fallas

Una vez modelada la frecuencia con la que ocurren las interrupciones eléctricas, el siguiente componente crítico para el simulador termodinámico consiste en determinar cuánto tiempo dura cada apagón (D). La duración de una falla es una variable aleatoria continua estrictamente positiva con una marcada asimetría hacia la derecha (la mayoría de los cortes se resuelven en pocas horas, pero existen eventos atípicos muy prolongados). Por este motivo, la teoría analítica establece que el comportamiento de las duraciones se modela mediante una distribución Log-normal:

$$D \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2)$$

Para calibrar los parámetros de escala μ (media de los logaritmos) y de forma σ (desviación estándar de los logaritmos) para cada régimen estacional, es necesario procesar los indicadores empíricos de la CFE bajo un esquema de desagregación temporal.

3.7.1. Desglose Mensual de Horas de Interrupción

De acuerdo con el registro histórico municipal consolidado para el año 2024, la duración promedio general de una interrupción en Tuxtla Gutiérrez fue de **2.39 horas por corte** Tabla 3.1. Sabiendo que el factor de escala espacial redujo el riesgo del edificio a una esperanza de **64 cortes locales al año**, podemos deducir la cantidad total de tiempo que el refrigerador experimentará desabasto eléctrico a lo largo de todo el año:

$$\text{Horas Totales del Año} = 64 \text{ cortes/año} \times 2.39 \text{ horas/corte} = 152.96 \text{ horas/año}$$

Para distribuir estas 152.96 horas anuales entre los 12 meses respetando la estacionalidad de la red, utilizamos el indicador SAIDI acumulado del *Informe Anual de la CFE 2024* Tabla 3.2. Primero, calculamos la diferencia marginal (ΔSAIDI_i) para aislar el impacto de cada mes. Posteriormente, mediante una regla de tres simple, equiparamos el SAIDI total acumulado al final del año (10.812 horas) con nuestras 152.96 horas de afectación local. La asignación de horas de falla para cada mes viene dada por:

$$\text{Horas del Mes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIDI}_i}{10.812} \right) \times 152.96$$

Finalmente, para conocer la duración promedio esperada de un corte individual en un mes específico (E_i), se divide la cantidad de horas asignadas de ese mes entre el número de cortes calculados previamente Tabla 3.3 ($E_i = \text{Horas del Mes}_i / \text{Cortes}_i$):

Tabla 3.5: Estimación de la duración promedio mensual por corte a partir de los indicadores SAIDI 2024.

Mes	SAIDI Acumulado	Δ SAIDI	Horas del Mes Calculadas	Cortes del Mes	Duración Media E_i (Horas)
Enero	0.998	0.998	14.12	7	2.017
Febrero	1.110	0.112	1.58	2	0.790
Marzo	1.285	0.175	2.48	3	0.827
Abril	2.793	1.508	21.33	3	7.110
Mayo	4.120	1.327	18.77	6	3.128
Junio	5.774	1.654	23.40	9	2.600
Julio	6.557	0.783	11.08	7	1.583
Agosto	7.905	1.348	19.07	8	2.384
Septiembre	8.592	0.687	9.72	9	1.080
Octubre	9.063	0.471	6.66	4	1.665
Noviembre	9.314	0.251	3.55	2	1.775
Diciembre	10.812	1.498	21.19	4	5.298

3.7.2. Cálculo de Medias y Varianzas por Régimen

Para alimentar la conmutación de regímenes de la EDE, agrupamos los meses en las tres temporadas climáticas analizadas. Sin embargo, realizar un promedio aritmético simple entre las duraciones mensuales introduciría un sesgo metodológico, ya que trataría por igual a un mes con 9 cortes que a uno con solo 2 cortes.

Para resolver esto, calculamos la media empírica ($\mathbb{E}[D_{reg}]$) y la varianza empírica ($\mathbb{V}[D_{reg}]$) de cada régimen utilizando estadística descriptiva ponderada, donde el peso de cada mes está determinado estrictamente por su número de cortes ($\omega_i = \text{Cortes}_i$). Analíticamente, es decir:

$$\mathbb{E}[D_{reg}] = \frac{\sum \omega_i E_i}{\sum \omega_i} = \frac{\text{Total de Horas del Régimen}}{\text{Total de Cortes del Régimen}}$$

$$\mathbb{V}[D_{reg}] = \frac{\sum \omega_i (E_i - \mathbb{E}[D_{reg}])^2}{\sum \omega_i}$$

Agrupando los datos bajo este criterio de ponderación, se obtienen las siguientes métricas muestrales por temporada:

- **Temporada de Calor (Mayo, Junio y Julio):** Acumula 22 cortes y 53.25 horas de interrupción, resultando en una duración media de $\mathbb{E}[D] = 2.420$ horas y una varianza de $\mathbb{V}[D] = 0.373$.
- **Temporada de Lluvias (Agosto, Septiembre y Octubre):** Suma 21 cortes y 35.45 horas de interrupción, generando una duración media de $\mathbb{E}[D] = 1.688$ horas y una varianza de $\mathbb{V}[D] = 0.343$.
- **Temporada Base e Invierno (Resto de meses):** Concentra 23 cortes y 64.25 horas, arrojando una duración media de $\mathbb{E}[D] = 2.793$ horas con una varianza más dispersa de $\mathbb{V}[D] = 4.650$ debido a la anomalía de abril.

3.7.3. Transformación Analítica a Parámetros Log-Normales

Una vez que conocemos la media ($\mathbb{E}[D]$) y la varianza ($\mathbb{V}[D]$) del sistema, debemos mapearlas hacia los parámetros analíticos internos μ y σ que requiere la función de distribución de probabilidad Log-normal.

La esperanza y la varianza de una variable aleatoria con distribución Log-normal están dadas por las siguientes dos identidades:

$$\mathbb{E}[D] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{V}[D] = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2) = (\mathbb{E}[D])^2 [\exp(\sigma^2) - 1]$$

Al resolver este sistema de ecuaciones no lineales de forma algebraica para despejar los parámetros objetivos en función de los momentos estadísticos conocidos, se deducen las fórmulas generales de calibración:

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\mathbb{V}[D]}{(\mathbb{E}[D])^2} \right)}$$

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[D]) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln \left(\frac{(\mathbb{E}[D])^2}{\sqrt{\mathbb{V}[D] + (\mathbb{E}[D])^2}} \right)$$

Al sustituir las medias y varianzas de cada temporada en estas relaciones, obtenemos los parámetros exactos de la distribución Log-normal que modelará la duración de las fallas eléctricas en cada temporada:

Tabla 3.6: Parámetros de la distribución Log-normal finales.

Temporada	Meses que lo integran	Media Empírica $\mathbb{E}[D]$	Varianza Empírica $\mathbb{V}[D]$	Parámetro μ	Parámetro σ
Base (Invierno)	Ene, Feb, Mar, Abr, Nov, Dic	2.793	4.650	0.7933	0.6838
Calor (Ola de Verano)	May, Jun, Jul	2.420	0.373	0.8529	0.2485
Lluvias (Ciclones)	Ago, Sep, Oct	1.688	0.343	0.4667	0.3371

3.8. Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

Enlazando la dinámica de la red eléctrica con la termodinámica, recordamos que la temperatura interna $T(t)$ del refrigerador está gobernada por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con saltos y conmutación de régimen. Para que la transición hacia el modelo computacional sea transparente, desglosamos la ecuación abstracta en su forma operativa mediante un sistema de ecuaciones acopladas, el cual depende estrictamente del estado del suministro eléctrico $\alpha(t)$:

$$dT(t) = \begin{cases} \kappa_{on}(\theta_{set} - T(t))dt + \sigma_{on}dW(t) + \gamma dN_{puerta}(t) & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ (Con energía)} \\ \kappa_{off}(T_{amb}(t) - T(t))dt + \sigma_{off}dW(t) + \gamma dN_{puerta}(t) & \text{si } \alpha(t) = 2 \text{ (Corte de luz)} \end{cases} \quad (3.8)$$

Para la modelación estocástica, los parámetros de inercia térmica y tiempo de autonomía (*holdover time*) se calibraron utilizando los datos técnicos del refrigerador institucional Haier HBC-150, el cual cuenta con certificación de protección Grado A contra congelamiento en el catálogo oficial PQS de la OMS ([Organización Mundial de la Salud 2024](#)).



Figura 3.2: Refrigerador institucional para vacunas Haier HBC-150 (Icelined Refrigerator). Este equipo tipo cofre cuenta con certificación PQS de la OMS y masa térmica incorporada para garantizar la red de frío durante cortes prolongados de energía eléctrica.

Para reflejar el comportamiento de este equipo bajo los rigurosos estándares normativos, calibramos cada coeficiente de la Ecuación 3.8 con base en la física del enfriamiento:

3.8.1. Régimen 1: Operación Normal ($\alpha(t) = 1$)

Ocurre cuando hay energía eléctrica y el compresor funciona empujando la temperatura hacia su objetivo.

- **Temperatura de Consigna** (θ_{set}): Se establece en 4°C, el centro ideal del rango normativo de seguridad (2°C a 8°C).
- **Velocidad de Enfriamiento** (κ_{on}): Representa la capacidad de potencia del motor para recuperar la temperatura. Se calibra en $\kappa_{on} = 0.1188$, una velocidad rápida propia de la compresión activa de acuerdo con ([Organización Mundial de la Salud 2024](#)).
- **Ruido del Compresor** (σ_{on}): El motor se prende y se apaga constantemente para mantener los 4°C. Acorde con un intervalo de confianza del 99.7% (aplicando la regla de las 3 sigmas de la distribución normal), queremos que las fluctuaciones máximas no excedan los $\pm 2^\circ\text{C}$ para evitar llegar a los 2°C (riesgo de congelación) o a los 6°C. Sabiendo que $3 \times SD = 2^\circ\text{C}$, la desviación estándar estacionaria debe ser $SD \approx 0.667^\circ\text{C}$. Despejando la volatilidad de la varianza a largo plazo del proceso Ornstein-Uhlenbeck ($SD = \frac{\sigma_{on}}{\sqrt{2\kappa_{on}}}$):

$$0.667 = \frac{\sigma_{on}}{\sqrt{2(0.1188)}} \implies \sigma_{on} \approx 0.325$$

3.8.2. Régimen 2: Falla Eléctrica ($\alpha(t) = 2$)

Se activa cuando el Proceso de Poisson dice que hay un apagón y el enfriamiento activo se detiene.

- **Temperatura Exterior** ($T_{amb}(t)$): La temperatura ambiente actúa como el atractor del sistema. Dado que en Tuxtla Gutiérrez el calor oscila drásticamente a lo largo del día, esta variable se modela computacionalmente como una función senoidal que alcanza su pico máximo a las 15:00 hrs. Para nuestra calibración analítica del peor escenario (estiaje), evaluamos este atractor en un máximo absoluto de 43°C. En este escenario, el término ($T_{amb} - T(t)$) se vuelve enorme y genera un calentamiento fuertemente acelerado.
- **Velocidad de Pérdida Térmica** (κ_{off}): De acuerdo con las especificaciones del fabricante validadas por la OMS ([Organización Mundial de la Salud 2024](#)), el equipo Haier HBC-150 garantiza un *Holdover Time* (tiempo de autonomía) de 60 horas con 50 minutos (60.83 horas) a una temperatura ambiente extrema de 43°C antes de rebasar los 8°C. Usando la solución analítica determinista de la Ley de Enfriamiento de Newton desde los 4°C de consigna hasta el límite de 8°C:

$$8 = 43 + (4 - 43)e^{-\kappa_{off}(60.83)}$$

Al resolver la ecuación ($\ln(\frac{35}{39}) = -60.83\kappa_{off}$), obtenemos un valor sumamente bajo de $\kappa_{off} \approx 0.00178 \text{ hr}^{-1}$. Esta dramática diferencia entre un parámetro rápido (κ_{on}) y uno

muy lento (κ_{off}) demuestra la efectividad de los revestimientos de hielo y justifica el uso de EDEs con conmutación de régimen.

- **Volatilidad Externa** (σ_{off}): Sin el compresor encendido, las variaciones aleatorias obedecen únicamente a micro-filtraciones de aire por las gomas de la puerta. Por ello, establecemos un ruido significativamente menor: $\sigma_{off} = 0.05$.

3.8.3. Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$)

De acuerdo con las normativas internacionales de manejo de red de frío, el refrigerador debe abrirse idealmente un máximo de dos veces al día: una apertura rutinaria matutina para extraer los frascos necesarios para la jornada y una vespertina para resguardar los sobrantes.

- **Tasa de Aperturas** (λ_{puerta}): Dado que la apertura matutina es un evento operativo fijo, la verdadera estocasticidad recae en la tarde, ya que el ingreso de biológicos depende de si hubo sobrantes en los termos clínicos. Por ello, la perturbación aleatoria se restringe a este momento y se modela computacionalmente con un Proceso de Poisson Homógeno con una tasa de $\lambda = 1$ evento/día.
- **Impacto de la Apertura** (γ): Al tratarse de un equipo tipo cofre (*Icelined Refrigerator*), la pérdida térmica es mucho menor que en equipos verticales, ya que el aire frío, siendo más denso, tiende a permanecer en el fondo del gabinete. Sin embargo, basándonos en estudios de convección para una apertura prolongada típica de 5 minutos (tiempo estimado para organizar y contabilizar viales), se introduce una carga térmica inesperada. Asignamos un incremento de $\gamma = +1^\circ\text{C}$ por evento. Esta es una perturbación instantánea que rompe la continuidad de la trayectoria y reduce críticamente el “colchón térmico” disponible en caso de ocurrir un apagón durante la noche.

3.9. Cinética de Degradación Térmica (Ecuación de Arrhenius)

La Ecuación Diferencial Estocástica calibrada anteriormente nos permite simular con alta precisión la temperatura interna del refrigerador $T(t)$. Sin embargo, para evaluar el impacto en la salud pública, es necesario traducir estas variaciones térmicas en pérdida de viabilidad del biológico.

La degradación de las vacunas (particularmente las vivas atenuadas, como el biológico contra el Sarampión o la Poliomielitis) es un proceso de desnaturalización proteica que se acelera exponencialmente con el calor. Esta velocidad de degradación $k(T)$ se modela mediante la **Ecuación de Arrhenius** (Chen y Kristensen 2009):

$$k(T(t)) = A \exp \left(-\frac{E_a}{R \cdot T_K(t)} \right) \quad (3.9)$$

Donde la temperatura $T_K(t) = T(t) + 273.15$ se expresa en grados Kelvin y los parámetros cinéticos para un biológico termosensible genérico se establecen como:

- **Constante Universal de los Gases (R):** $8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.
- **Energía de Activación (E_a):** Se calibra en $85,000 \text{ J/mol}$ (85 kJ/mol). Este valor representa la barrera energética que debe superarse para que las proteínas del antígeno comiencen a romperse irreversiblemente.
- **Factor Pre-exponencial (A):** Se ajusta a un valor de 1.2×10^{14} . Este factor de frecuencia asegura que la tasa de degradación sea prácticamente nula cuando el equipo opera correctamente en el rango normativo de 2°C a 8°C , pero escale logarítmicamente durante una excursión térmica severa.

3.9.1. El Modelo de Daño Térmico Acumulado (DA)

En la práctica clínica normativa, las variaciones térmicas dentro del rango seguro (2°C a 8°C) se consideran tolerables y su impacto en la caducidad a corto plazo es ignorado. El daño crítico ocurre exclusivamente cuando la red de frío se rompe.

Para modelar este protocolo operativo dentro de nuestra simulación, el **Daño Acumulado** (DA) se calcula como la integral de la tasa de Arrhenius, condicionada por una función indicadora $\mathbb{I}_{\{T(t) > 8^\circ\text{C}\}}$ que “enciende” el reloj de degradación únicamente cuando la temperatura cruza el límite superior de seguridad:

$$DA(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{T(s) > 8\}} \cdot k(T(s)) ds$$

Esta formulación integral permite que el simulador de Montecarlo contabilice el estrés térmico exacto de cada trayectoria. Si durante un apagón prolongado la EDE empuja a $T(t)$ muy por encima de los 8°C , el integrando crecerá rápidamente. Si al final de un año simulado el $DA(t)$ rebasa un umbral de descarte crítico predefinido, el lote de vacunas se considerará como pérdida total.

Parte III

Simulación de Equipos (Haier HBC-150)

4 Metodología de Simulación Computacional y Análisis Estadístico de Riesgo

Para evaluar la confiabilidad de la red de frío frente a la volatilidad del suministro eléctrico y las condiciones climáticas de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, desarrollamos un simulador estocástico en Python enfocado en el refrigerador institucional Haier HBC-150 presentado en la sección anterior. Debido a la interacción de múltiples procesos aleatorios inesperados (cortes de energía de CFE, aperturas de puerta y variaciones extremas de temperatura), el sistema no posee una solución matemática analítica cerrada. En consecuencia, recurrimos a la integración numérica de trayectorias acoplada al método de Montecarlo.

Nota sobre Reproducibilidad: Con el fin de mantener este reporte de investigación con un formato académico limpio y legible, hemos omitido el código fuente de programación. El script completo se encuentra documentado detalladamente en el repositorio público de GitHub de este proyecto ([Repositorio de GitHub](#)).

A continuación, exponemos detalladamente el diseño metodológico de la simulación estructurado según el orden lógico de las celdas del algoritmo computacional, seguido de la discusión profunda de los resultados obtenidos.

4.1. 1. Procesamiento Temporal y Entorno Climático

El primer módulo de la simulación constituye el eje central del sistema. Definimos una malla de tiempo continua para cubrir un año completo (366 días, contemplando el año bisiesto 2024). Para capturar las microfluctuaciones de la temperatura interna del refrigerador, seleccionamos un paso de integración discreto de exactamente 5 minutos ($\Delta t = 5/60$ horas), lo que genera un total de 105408 iteraciones por cada trayectoria anual simulada.

Para acoplar con la logística institucional, programamos un calendario interno que identifica los días hábiles (lunes a viernes) y los fines de semana (sábados y domingos), debido a que la extracción de vacunas ocurren exclusivamente en jornadas laborales.

Primero cargamos la base de datos meteorológicos reales de Tuxtla Gutiérrez. No obstante, las bases de datos públicas solo proveen la temperatura promedio diaria (T_{media}), ocultando el estrés térmico entre días. Para solucionar, expandimos el vector diario a la escala de 5 minutos mediante una función armónica (onda senoidal) con una amplitud térmica calibrada

de 7°C (equivalente a una oscilación típica de 14°C entre la madrugada y la tarde chiapaneca). Desfasamos el argumento del coseno por 15 horas para forzar que el pico de calor sea a las 15:00 horas de cada día simulado:

$$T_{amb}(t) = T_{media}(t) + 7.0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t - 15}{24}\right).$$

Donde t representa el tiempo en horas, es decir, $t \in [0, 8784)$ para un año de 366 días. La oscilación de la temperatura ambiente se presenta en la Figura 4.1, que muestra el comportamiento anual, y en la Figura 4.2, que demuestra la consistencia del ciclo diurno continuo.

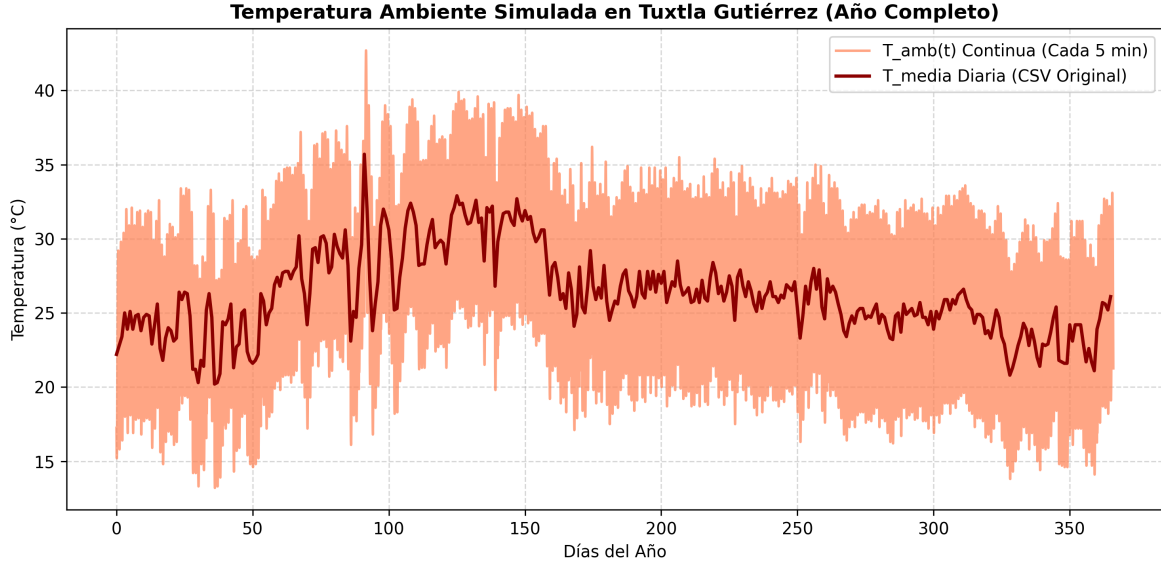


Figura 4.1: Temperatura ambiente continua simulada para Tuxtla Gutiérrez a lo largo de un año completo, comparada con los promedios diarios de la base de datos meteorológica original.

4.2. 2. Parametrización Física, Cinética y Estocástica de la Red

Una vez construido el entorno temporal y climático, procedemos a inicializar las constantes que controlan las fuerzas físicas del refrigerador Haier HBC-150 y las propiedades biológicas de las vacunas.

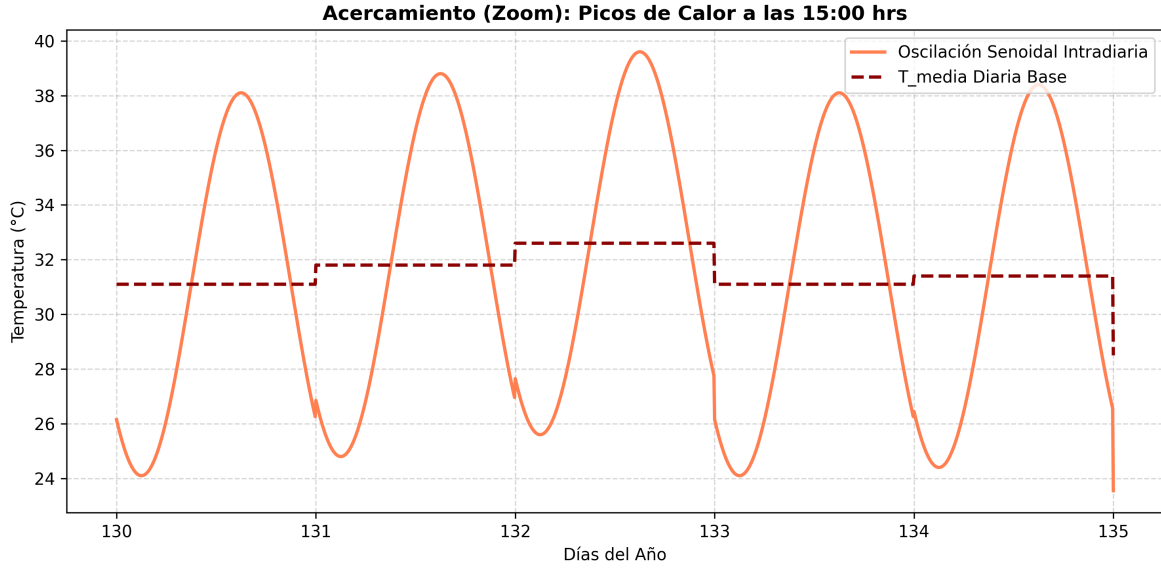


Figura 4.2: Acercamiento a un periodo de 5 días de simulación climática (Mayo), donde se observa el comportamiento de la oscilación senoidal entre días y la ubicación exacta de los picos térmicos a las 15:00 horas.

4.2.1. Parámetros Termodinámicos y Cinéticos del Equipo

Asignamos los coeficientes térmicos constantes previamente estimados para el modelo de Ornstein-Uhlenbeck (EDE). Cuando el equipo cuenta con electricidad, la tasa de abatimiento térmico se fija en $\kappa_{on} = 0.1188 \text{ hr}^{-1}$ con una volatilidad interna de los ventiladores de $\sigma_{on} = 0.325$, obtenidos con los calculos de la sección anterior Sección 3.8.1. Ante un escenario de falla eléctrica, el compresor se apaga y el aislamiento de alta densidad del equipo (reforzado por sus paquetes de hielo internos) frena la transferencia de calor, lo que se modela con una inercia pasiva sumamente lenta de $\kappa_{off} = 0.00178 \text{ hr}^{-1}$ y un ruido por microfiltraciones de aire de $\sigma_{off} = 0.05$, estimado en la Sección 3.8.2. La temperatura objetivo del termostato se establece en $\theta = 4.0^\circ\text{C}$ y el equipo arranca en esta misma condición inicial ($T_0 = 4.0^\circ\text{C}$).

Para modelar la degradación biológica, configuramos las constantes de la ecuación de Arrhenius Ecuación 3.9 para un biológico termosensible genérico (perfil biológico representativo de vacunas vivas atenuadas como Sarampión o Poliomielitis). La energía de activación crítica se establece en $E_a = 85,000 \text{ J/mol}$ (85 kJ/mol), la constante universal de los gases en $R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ y el factor de frecuencia preexponencial en $A = 1.2 \times 10^{14}$, estos parámetros se obtuvieron de la Sección 3.9.

Finalmente, programamos la lógica operativa para las aperturas de puerta durante las jornadas de consulta (lunes a viernes). Para aproximarnos a la realidad clínica, dividimos este comportamiento operativo en dos reglas independientes:

- a) **Regla Matutina (Determinista):** Se programa una apertura fija y obligatoria exactamente a las 8:00 AM, momento en el que el personal de enfermería extrae los lotes de vacunas que se utilizarán en la jornada matutina.
- b) **Regla Vespertina (Estocástica):** Entre las 15:00 y las 17:00 horas (horario de cierre y resguardo), se activa una tasa de probabilidad basada en un proceso de Poisson con una intensidad de $\lambda_{tarde} = 0.5$ aperturas por hora, en proporción a la longitud del horario vespertino, modelando así las aperturas aleatorias para almacenar los frascos sobrantes. Cada evento de apertura incrementa instantáneamente un salto térmico constante de $\gamma = +1.0^{\circ}\text{C}$ al interior del equipo. Ambas reglas dejan de funcionar por completo si el indicador de fin de semana es verdadero.

4.2.2. Parámetros Estocásticos de Fallas de la CFE

El riesgo externo del suministro eléctrico se parametriza mediante el comportamiento histórico de fallas de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en la región Sureste. Retomando los cálculos de la Sección 3.5, programamos la tasa de fallas diarias $\lambda_{cfe}(t), t > 0$ como un Proceso de Poisson No Homogéneo, donde combinamos un riesgo base de fallas locales (0.0667 cortes/día) con dos campanas gaussianas estacionales que modelan los picos de cortes debidos al sobrecalentamiento de transformadores en verano (centrada en el día 152) y la temporada de tormentas tropicales (centrada en el día 244):

$$\lambda_{cfe}(t) = 0.0667 + 0.2333 \cdot \exp\left(-\frac{(t-152)^2}{3200}\right) + 0.2333 \cdot \exp\left(-\frac{(t-244)^2}{1800}\right).$$

Para la duración de dichos cortes, incorporamos los parámetros de escala y forma (μ y σ) de una distribución Log-Normal calibrada por el método de los momentos para tres estaciones del año, usando para su estimación los datos históricos: temporada base ($\mu = 0.7933, \sigma = 0.6838$), temporada de estrés por calor ($\mu = 0.8529, \sigma = 0.2485$) y temporada de lluvias de alta intensidad ($\mu = 0.4667, \sigma = 0.3371$).

4.3. 3. Precalibración Vectorizada de Eventos Externos

Antes de ponernos a resolver la ecuación diferencial estocástica de la temperatura, el algoritmo ejecuta un módulo de precalculabilidad vectorizada para optimizar los tiempos de cómputo. En esta fase, el programa simula de manera independiente las variables externas que afectarán al refrigerador a lo largo del año de prueba.

Para el suministro eléctrico, el algoritmo recorre secuencialmente los 366 días del año. Para cada día, consultamos la intensidad estacional de la CFE y realizamos un muestreo aleatorio de Poisson para determinar cuántas fallas eléctricas ocurrirán en esa jornada. Si el resultado es

mayor a cero, el algoritmo selecciona una hora de inicio distribuida de manera uniforme entre las 0 y las 24 horas de ese día, y realiza un muestreo Log-Normal condicionado a la fecha para determinar la duración del corte en horas. Con estos datos, el algoritmo calcula los índices temporales correspondientes y modifica el vector de estado eléctrico $S(t)$, cambiando su valor de 1 (hay energía eléctrica) a 0 (no hay energía eléctrica) durante el intervalo afectado.

Para las aperturas de la puerta del refrigerador, el algoritmo genera un vector binario de eventos evaluado en el dominio de tiempo discreto $t \in \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 8784\}$ horas. Dado que el paso de integración se fijó en $\Delta t = 5/60$ horas (es decir 5 minutos), este conjunto se particiona exactamente en 105408 iteraciones para cubrir la totalidad del año. Este vector se construye combinando la apertura de las 8:00 AM con un muestreo de Poisson ejecutado sobre la tasa de intensidad de la tarde ($\lambda_{tarde} \cdot \Delta t$).

Posteriormente, el algoritmo aplica una regla estricta de control sanitario: multiplica el vector de aperturas por la función de estado eléctrico $S(t)$, donde la variable de entrada t en $S(t)$ se mueve exactamente en el mismo intervalo discreto de $[0, 8784]$ horas. Esto garantiza que si la central de almacenamiento de vacunas se encuentra bajo un apagón en un instante específico ($S(t) = 0$), la probabilidad de apertura en ese mismo t se reduce a cero de forma absoluta, reflejando el protocolo médico real que prohíbe abrir el refrigerador si no hay energía para evitar la pérdida acelerada de frío.

Finalmente, los eventos válidos se multiplican por la magnitud del impacto térmico ($\gamma = 1.0^\circ\text{C}$) para terminar el vector discreto temporal de saltos térmicos ($\text{Saltos_Termicos}(t)$).

En el año de prueba inicial con semilla controlada, la simulación arrojó que hay **68 apagones** y un total de **508 aperturas de puerta** hechas por el personal clínico.

4.4. 4. Resolución de la SDE

Con todos los vectores de perturbaciones externas precalculados, se procede a ejecutar el núcleo analítico del modelo, resolviendo la evolución de la temperatura interna y su impacto directo sobre el lote de vacunas.

4.4.1. Integración de la Temperatura por Cambios de Régimen

Para avanzar en el tiempo, el algoritmo recorre la iteración i en el intervalo $i \in [1, 105407]$. El índice arranca en 1 y no en 0 porque el primer valor de la matriz corresponde a la condición inicial ya conocida de la temperatura interna del refrigerador ($T_0 = 4^\circ\text{C}$). En cada iteración i , evalúa el estado del suministro eléctrico en el paso previo ($S_t[i - 1]$), activando un cambio de régimen dinámico (*regime-switching*). Si el suministro está activo, aplica los parámetros de convección forzada (κ_{on}, σ_{on}) llevando a la temperatura hacia la temperatura ideal ($\theta = 4.0^\circ\text{C}$) y le suma el salto térmico si la puerta fué manipulada. Si el suministro está apagado, el algoritmo desactiva los ventiladores y acopla la inercia térmica pasiva ($\kappa_{off}, \sigma_{off}$), provocando

que la temperatura del refrigerador sea atraída hacia la temperatura ambiente exterior de Tuxtla Gutiérrez ($T_{amb}[i - 1]$).

La solución numérica se ejecuta mediante el esquema de Euler-Maruyama desarrollado en la Sección 2.7.1. Es fundamental destacar que, dado que las volatilidades térmicas (σ_{on} y σ_{off}) actúan como ruidos aditivos constantes independientes del estado de la temperatura $X(t)$, sus derivadas parciales respecto al estado son nulas ($\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$). Debido a esta propiedad del cálculo estocástico, el término de corrección de segundo orden del método de Milstein se multiplica por cero y desaparece por completo, demostrando que el esquema de Milstein se reduce de forma exacta al método de Euler-Maruyama aquí empleado.

Simultáneamente, el ciclo evalúa el daño térmico acumulado mediante la ecuación de Arrhenius. Si la temperatura interna del refrigerador supera el límite normativo de seguridad ($X_t[i] > 8.0^\circ\text{C}$), el algoritmo convierte la temperatura a grados Kelvin, calcula la constante cinética instantánea $k(t)$ y actualiza la viabilidad de la vacuna (V_t) aplicando un decaimiento exponencial dependiente de Δt . Si la temperatura se mantiene a salvo dentro del rango seguro, la viabilidad farmacológica permanece congelada en su valor previo. La dinámica resultante para el año completo se expone en la Figura 4.3, mientras que la Figura 4.4 presenta un acercamiento exclusivo al mes crítico de junio.

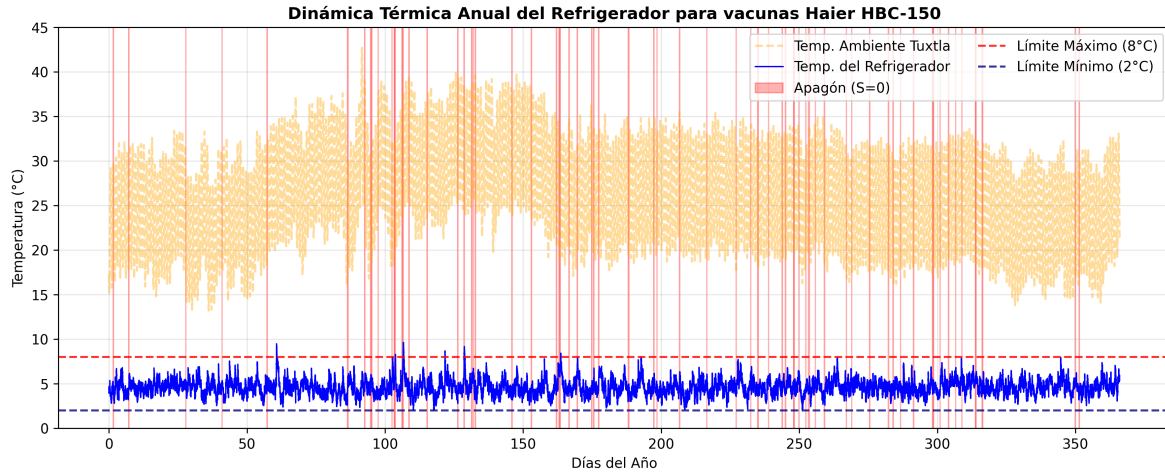


Figura 4.3: Dinámica térmica anual simulada para el refrigerador Haier HBC-150. Las zonas sombreadas en rojo indican la ocurrencia de los 68 apagones a lo largo del año, la trayectoria de color azul indica la temperatura interna del refrigerador (la solución numérica de la EDE), y la trayectoria de color amarillo indica la temperatura ambiente en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

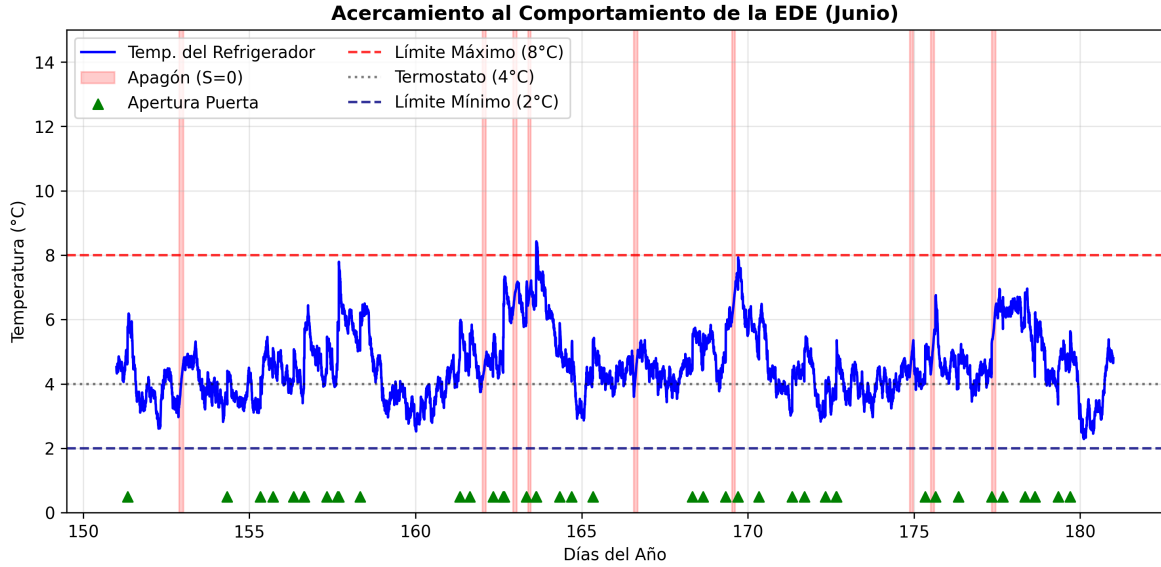


Figura 4.4: Acercamiento del comportamiento de la EDE durante el mes de junio. Se omitió el clima exterior para observar la estabilidad del termostato (4°C), los impactos de las aperturas (triángulos verdes inferiores) y la pérdida de frío en los apagones.

4.4.2. Integración de la Dinámica Logística de Inventario y Mermas

Para pasar de una pérdida de viabilidad teórica a pérdidas de vacunas, acomodamos la simulación al inventario físico real del equipo (I_t), donde t representa el tiempo cada 5 minutos. El algoritmo avanza iteración por iteración, utilizando tres características logísticas clave:

1. **Consumo Mensual Estacional:** Si el reloj de la simulación marca exactamente las 8:00 AM en un día hábil, el algoritmo resta la demanda diaria asignada a ese mes (ej. 65 dosis en meses regulares, aumentando a 163 dosis en octubre por Influenza).
2. **Penalización por Merma Instantánea:** En ese mismo paso de tiempo, si la temperatura supera los 8°C, el algoritmo extrae la fracción de pérdida calculada por la ecuación de Arrhenius ($1 - \exp(-k_t \cdot \Delta t)$) y se multiplica por el número exacto de vacunas almacenadas en el refrigerador en ese instante. El resultado representa las dosis perdidas, las cuales son restadas del inventario activo y acumuladas en un vector de mermas acumuladas.
3. **Reabastecimiento Automático:** Si el inventario cae por debajo del stock de seguridad o punto de reorden (1,000 dosis), se simula la llegada instantánea del camión de distribución, el cual recarga el equipo hasta su capacidad máxima de 5,000 dosis. El algoritmo registra la cantidad exacta de dosis entregadas en la variable `total_dosis_ingresadas` para calcular con precisión la tasa de pérdida global al final de la simulación. La interacción de esta logística con las mermas físicas se visualiza en la Figura 4.5.

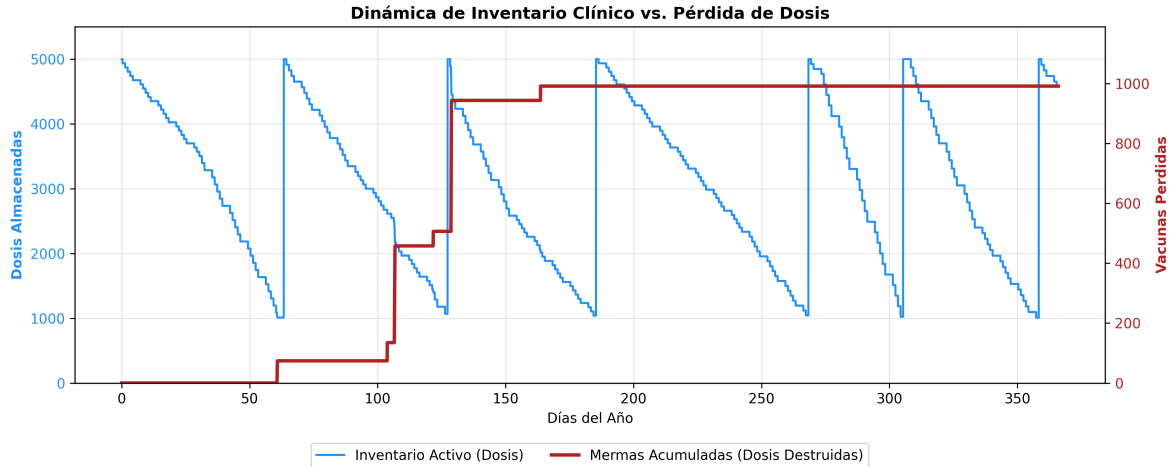


Figura 4.5: Simulación del inventario de vacunas a lo largo del año (dientes de sierra) de la central de almacenamiento de vacunas (eje izquierdo) y el crecimiento acumulado de las dosis destruidas por fallas térmicas (eje derecho).

4.5. 5. Estructura de la Simulación Montecarlo

Con el fin de obtener validez científica y no depender del escenario de una sola simulación, empaquetamos el algoritmo completo dentro de la función `simular_un_ano(semilla)`. Para optimizar drásticamente la velocidad de ejecución en Google Colab y permitir análisis masivos, vectorizamos la generación del ruido browniano creando el arreglo global de variables normales `dW_vec` al inicio de la función.

Invocamos esta función dentro de un bucle de **Montecarlo con 1,000 simulaciones independientes**, asignando en cada iteración una semilla de aleatoriedad indexada (`semilla = sim + 42`). Al correr 1,000 años simulados, el algoritmo elimina las fluctuaciones extremas de los escenarios individuales y permite que actúe la **Ley de los Grandes Números** (Ross 2018). Esto provoca que las métricas de control se estabilicen firmemente en promedios realistas: el simulador reportó un promedio global de **64.0 apagones por año** (alineado con los datos meteorológicos de la zona de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas de la CFE) y un promedio de **515 aperturas de puerta anuales**, validando el comportamiento del personal clínico y la infraestructura eléctrica de entrada.

4.6. 6. Resultados Estadísticos y Riesgo Operativo

Después de simular las 1,000 trayectorias de Montecarlo, procedemos a realizar el análisis de inferencia estadística para determinar el verdadero nivel de riesgo al que están expuestas las vacunas en Tuxtla Gutiérrez.

El comportamiento de los daños acumulados se aprecia con claridad en las trayectorias aleatorias presentadas en la Figura 4.6. El comportamiento de las curvas demuestra que el riesgo no es lineal; la tendencia de la merma anual depende estrictamente de la coincidencia temporal entre la duración de un apagón de la CFE y el nivel de saturación del almacenamiento de vacunas en ese día específico del año.

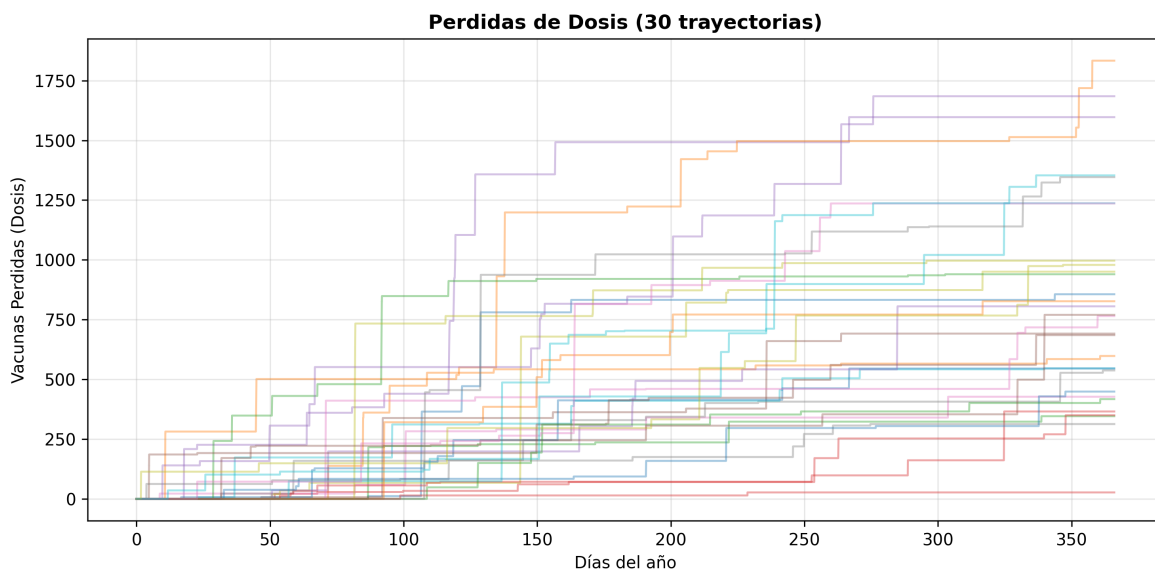


Figura 4.6: 30 trayectorias anuales aleatorias. Muestra la tendencia en la acumulación de dosis destruidas a lo largo de los 366 días del año.

Al desglosar las pérdidas de dosis de forma mensual, los datos revelan el verdadero comportamiento del riesgo operativo a lo largo del año, expuesto en la Figura 4.7 (Promedio mensual) y en la Figura 4.8 (Mediana mensual).

Inicialmente, desde un punto de vista puramente logístico, se podría pensar que los meses de otoño (octubre y noviembre) presentarían la mayor cantidad de vacunas perdidas, debido a que en esa temporada el refrigerador opera a su máxima capacidad por el arranque de la campaña nacional invernal contra la Influenza. Sin embargo, la simulación muestra que **el factor termodinámico y eléctrico domina por completo al volumen de inventario**. Tanto el promedio como la mediana revelan que **el verdadero pico de pérdidas materiales se concentra severamente en la temporada de calor extremo: marzo, abril y mayo**.

Durante este trimestre, Tuxtla Gutiérrez experimenta sus temperaturas ambientales máximas. Este calor extremo genera un doble impacto en el sistema: por un lado, dispara el estrés sobre la infraestructura de la CFE (debido al uso masivo de aires acondicionados en la ciudad), provocando la mayor tasa de apagones por sobrecalentamiento de transformadores; por otro lado, reduce drásticamente el tiempo de autonomía pasiva del refrigerador apagado, acelerando la cinética de degradación de Arrhenius de las vacunas.

En el gráfico de promedios, estos tres meses resultan casi idénticos en su alto nivel de pérdidas, confirmando que la primavera es la temporada crítica. Al observar la métrica de la mediana (estadísticamente más robusta porque aísla los años atípicamente catastróficos), el mes de **abril** sobresale como el periodo donde la pérdida de vacunas es superior a la de los otros meses. Queda comprobado que la red de frío chiapaneca es altamente vulnerable al choque térmico primaveral, superando cualquier riesgo derivado de la saturación logística de otras temporadas.

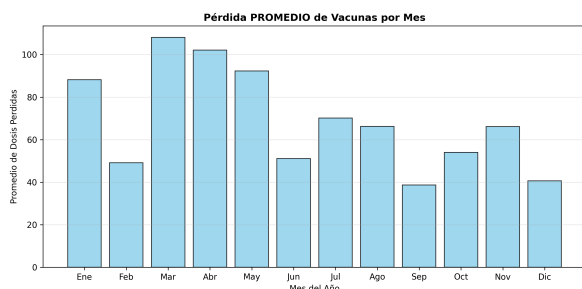


Figura 4.7: Pérdida promedio de dosis de vacunas por mes calculada sobre las 1,000 trayectorias de Montecarlo, mostrando el impacto crítico durante los meses de calor.

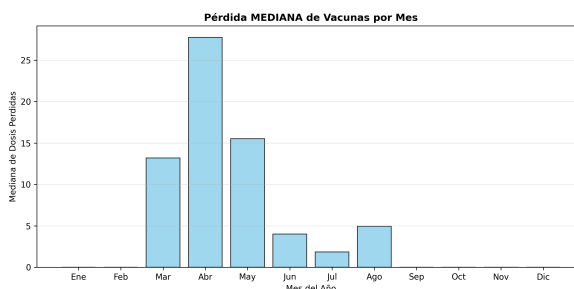


Figura 4.8: Pérdida mediana de dosis de vacunas por mes, confirmando que el mes de abril representa el escenario de mayor riesgo operativo para la red de frío.

Finalmente, para estandarizar el riesgo sin importar la escala de la unidad médica, transformamos las dosis destruidas en porcentajes relativos respecto al volumen total de vacunas manejadas por el equipo en el año. Al hacer las 1,000 simulaciones, el algoritmo arrojó el histograma presentado en la Figura 4.9. La distribución presenta una asimetría positiva (cola estirada hacia la derecha), comportamiento típico de los sistemas de riesgo operativo expuestos a fallas intermitentes severas.

Los estadísticos descriptivos e inferenciales del modelo revelan que:

- La **mediana de mermas** anuales se ubica en **751 dosis**, lo que representa una tasa de pérdida del **2.57 %** de los lotes administrados.
- El **promedio de mermas** anuales se eleva a **827 dosis** (tasa del **2.87 %**), el cual es mas alto por la presencia de años atípicamente catastróficos en la cola de la distribución.
- El **Value at Risk (VaR) al 95 % de confianza** (riesgo severo) advierte que los centros de almacenamiento de vacunas se enfrentan a escenarios extremos donde se perderán hasta **1,736 dosis** en un solo refrigerador institucional.

A partir de los percentiles del histograma, podemos concluir con un **95 % de nivel de confianza (Intervalo de Predicción)** que un centro de almacenamiento de vacunas en Tuxtla Gutiérrez, operando con un equipo normado por la OMS de última generación (Haier HBC-150), **sufrirá**

una pérdida inevitable de entre el 0.72 % y el 6.57 % de su inventario anual debido a las condiciones climáticas locales y las condiciones eléctricas.

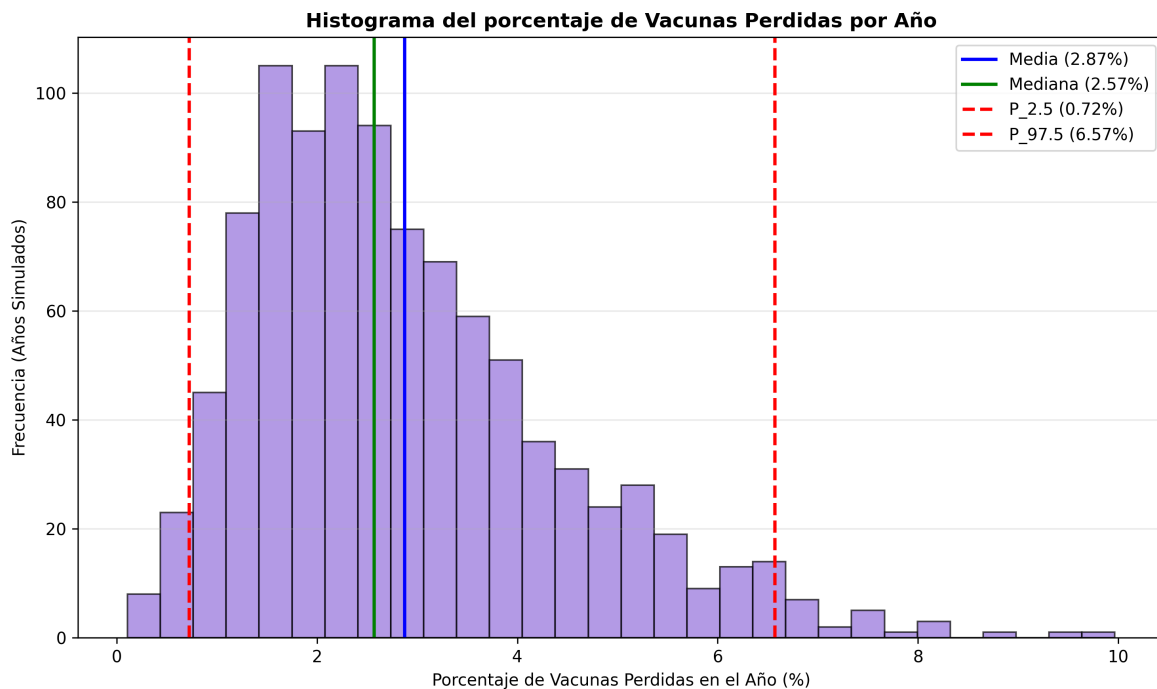


Figura 4.9: Histograma para el porcentaje de vacunas perdidas anualmente. Se detallan las casillas de centralidad (media y mediana) y las líneas de acotación del intervalo de predicción del 95 %.

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

El análisis estocástico implementado anteriormente mediante 1,000 simulaciones independientes de Montecarlo permitió medir de forma objetiva el riesgo térmico y operativo al que está expuesta la conservación de vacunas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, utilizando el refrigerador institucional Haier HBC-150. Los resultados integran las fuerzas termodinámicas locales, las interrupciones del suministro eléctrico y las restricciones de la cinética química de la degradación.

5.1. 1. Conclusiones del Análisis de Riesgo Operativo

A partir simulación anterior, se extraen las siguientes conclusiones principales:

- **Cuantificación de Merms Anuales:** Bajo un escenario normado que registró un promedio global de 64.0 apagones de la CFE y 515 aperturas de puerta anuales, la mediana de pérdidas se estableció en 751 dosis por refrigerador (equivalente a una tasa de pérdida del 2.57 % del total de vacunas almacenadas), mientras que el promedio se ubicó en 827 dosis (2.87 %).
- **Intervalo de Predicción:** El análisis de los percentiles del histograma permite concluir, con un 95 % de nivel de confianza, que un centro de almacenamiento de vacunas operando bajo estas condiciones experimentará merms inevitables de entre el 0.72 % y el 6.57 % de su inventario anual. Asimismo, el indicador *Value at Risk* (VaR) al 95 % advierte que en escenarios de alta vulnerabilidad las pérdidas pueden ascender hasta las 1736 dosis por equipo.
- **Dominancia Termodinámica sobre la Logística:** Al evaluar la estacionalidad del daño, se rechazó la hipótesis de que el volumen de saturación logística por la campaña de Influenza en octubre y noviembre provocaría la mayor pérdida de vacunas. Los datos demuestran que el factor climático y eléctrico ejerce una dominancia absoluta sobre el inventario. Las merms se concentran de manera sostenida en el trimestre de marzo, abril y mayo debido a que las elevadas temperaturas ambientales reducen el tiempo de retención del frío del equipo y aceleran la tasa cinética de la ecuación de Arrhenius. La métrica de la mediana identificó a **abril** como el mes con el mayor índice de riesgo y pérdida de vacunas del año.

5.2. 2. Limitaciones del Modelo y Trabajo Futuro

El modelo desarrollado durante la estancia del Verano Delfín proporciona una metodología matemática reproducible para la evaluación de políticas de salud pública y equipamiento térmico. No obstante, con el fin de simplificar el cómputo y mantener el alcance de una investigación de licenciatura, se omitieron ciertas dinámicas que se proponen como trabajo a futuro:

5.2.1. Estimación de Parámetros

En este estudio se consideraron constantes los coeficientes de transferencia de calor por conducción y convección del refrigerador, representados por la tasa de abatimiento activo (κ_{on}) y la tasa de inercia pasiva (κ_{off}). Como trabajo futuro, se plantea desarrollar un modelo de estimación paramétrica donde estos coeficientes varíen continuamente en el tiempo. Esta variación se programará en función directa de la fracción de llenado diario del refrigerador, permitiendo que la fluctuación real de la masa térmica interna afecte dinámicamente la velocidad de amortiguación térmica ante las fallas eléctricas.

5.2.2. Proceso de Saltos por Aperturas

La regla de las aperturas del refrigerador se limitó a un escenario promedio de uso diario (una apertura fija matutina y un proceso estocástico vespertino). Para aproximar el simulador a la realidad de las unidades médicas, el trabajo a futuro requiere incorporar escenarios extremos en el proceso de saltos:

1. **Escenario de Aperturas Nulas:** Modelar los días en que el refrigerador no es operado por el personal (como fines de semana prolongados o periodos de inactividad). En estos casos, las variaciones de temperatura interna deberán ser absorbidas y capturadas exclusivamente por el ruido aditivo del movimiento browniano de la EDE, manteniendo el proceso de saltos discretos en cero.
2. **Escenario de Alta Demanda:** Incorporar una tasa de intensidad variable que simule jornadas de vacunación masivas o contingencias sanitarias, donde el volumen de aperturas sea excesivo e incremente la inyección de calor acumulado por encima de los parámetros estándar evaluados en este reporte.

Referencias

- Arnold, Ludwig. 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Asmussen, Søren. 2003. «Applied Probability and Queues». En, 2nd ed., 51:39-59. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. New York, NY: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5_2.
- Chen, Dexiang, y Debra Kristensen. 2009. «Opportunities and challenges of developing thermostable vaccines». *Expert review of vaccines* 8 (5): 547-57. <https://doi.org/10.1586/erv.09.20>.
- Comisión Federal de Electricidad. 2024. «Informe Anual 2024». Ciudad de México: Gobierno de México.
- Karatzas, Ioannis, y Steven E. Shreve. 1998. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Vol. 113. Graduate Texts en Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2>.
- Karlin, Samuel, y Howard M. Taylor. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. 3rd ed. San Diego, CA: Academic Press.
- Kloeden, Peter E., y Eckhard Platen. 1992. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Vol. 23. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Organización Mundial de la Salud. 2024. *WHO Immunisation Devices - Performance, Quality & Safety. E003: Refrigerators and freezers*. World Health Organization. https://apps.who.int/immunization_standards/vaccine_quality/pqs_catalogue/index.aspx.
- Platen, Eckhard, y Nicola Bruti-Liberati. 2010. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*. Vol. 64. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13694-8>.
- Repositorio de GitHub. «Simulador Estocástico y Análisis de Riesgo en la Red de Frío para Vacunas: Código Fuente en Python». https://github.com/Crisperez517/VERANO-DELFIN/blob/3a3f49b27bca9671e71b40c738dec826c8eb30cc/VERANO_DELFIN_SIMULACION_CODIGO_DE_PYTHON.ipynb.
- Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes*. 2nd ed. New York, NY: Wiley.
- . 2018. *A First Course in Probability*. 10th ed. Pearson.
- Secretaría de Energía. 2024. «Programa para el Desarrollo del Sistema Eléctrico Nacional (PRODESEN) 2024-2038». Ciudad de México: Gobierno de México.
- Yin, G. George, y Chao Zhu. 2010. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. Vol. 63. *Stochastic Modelling y Applied Probability*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1105-6>.