

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS



AQUI VA EL NOMBRE DE LA TESIS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

CRISTÓBAL PÉREZ GONZÁLEZ 100003223

DIRECTOR:

Dr. Yofre Hernán García Gómez

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas a 9 de noviembre de 2026.

Dedicatoria

A Dios, por toda la fuerza y la sabiduría que me ha dado a lo largo de toda mi vida.

A mis padres, María Teresa y Sebastián, por estar siempre a mi lado, confiar en mí en todo momento y brindarme su respaldo incondicional para que pudiera alcanzar este sueño.

Esta tesis es para ustedes; es mi manera de agradecerles todo su amor, paciencia, confianza y cada sacrificio que han hecho por mí.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por toda la sabiduría que me ha brindado, tanto durante la escritura de esta tesis y mi paso por la carrera, como a lo largo de toda mi vida. Gracias por darme las fuerzas necesarias cuando más las necesitaba y en aquellos momentos en los que sentía que las cosas no me iban a salir.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Yofre Hernán García Gómez, mi director de tesis, por todo el apoyo y la confianza que ha tenido en mí. Aunque esta investigación tuvo varios momentos difíciles en los que creíamos que algo no nos saldría, gracias a su guía y a su gran paciencia conmigo nunca me di por vencido. Finalmente, le agradezco por enseñarme que las Matemáticas Aplicadas tienen la capacidad de ayudar y mejorar la vida de las personas.

Asimismo, agradezco a todos mis profesores y profesoras que tuve a lo largo de la licenciatura. Al Dr. Aarón, al Dr. Sergio, al Dr. Javier y al Dr. Saúl, gracias por enseñarme de la mejor forma y con el mayor rigor posible la matemática que hoy sé. Al Dr. Boris, por ser mi tutor durante toda la carrera; gracias por creer en mí desde el primer momento y por animarme siempre a seguir adelante en el hermoso camino de las Ciencias Exactas. Al Mtro. Elesban, por su forma tan especial de enseñar y por hacer que amara la programación. A la Mtra. Marda, por ser más que una maestra, una amiga; gracias por sus regaños que me ayudaron a mejorar como persona y por ser quien me introdujo al mundo de las ecuaciones diferenciales. De igual manera, quiero agradecer al Dr. Yofre y al Dr. Armando por su forma tan pacífica de enseñar y por haberme introducido al hermoso mundo de la probabilidad y de los procesos estocásticos.

De manera muy especial, agradezco a mis padres, María Teresa y Sebastián, por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, tanto en lo económico como en lo emocional. Gracias por impulsarme siempre a seguir adelante, por nunca dudar de mí y por motivarme en todo momento a estudiar esta carrera. También agradezco a mis hermanos, Saraí, Cristian y Cristóbal, por estar conmigo, motivarme y hacerme compañía cada vez que estoy en casa con ellos.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a mis amigos. A Carlos y Marbin, por ser las personas con las que más conviví a lo largo de la carrera, por acompañarme en este proceso tan largo pero tan gratificante, y por estar siempre conmigo cuando más los necesitaba o cuando me sentía sin ánimos. A Mariana, Michelle y Sofía, por estar a mi lado en mis momentos más difíciles; gracias por todos sus consejos, sus ánimos y los abrazos que me dieron cuando sentía que ya no podía más. Gracias a todos ustedes por ser los mejores amigos que pude tener en mi vida.

A todos ustedes, muchas gracias, ya que sin su apoyo incondicional, sus consejos y su motivación, este logro no lo habría podido conseguir yo solo.

Tabla de contenidos

1. Resumen **8**
1.1. Abstract 8

2. Introducción **10**

3. Objetivos **12**
3.1. Objetivo general 12
3.2. Objetivos específicos 12

I. Marco Teórico **13**

4. Fundamentos Teóricos Matemáticos **14**
4.1. Espacios de Probabilidad, Filtraciones y Procesos Estocásticos 14
4.2. Componentes Estocásticos Fundamentales 16
4.2.1. Movimiento Browniano (Proceso de Wiener) 16
4.2.2. Procesos de Poisson y Discontinuidades por Saltos 17
4.2.3. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo 19
4.3. Teoría de Integración Estocástica de Itô 21
4.3.1. Construcción de la Integral de Itô e Isometría 22
4.4. Teoría de Medidas Aleatorias e Integración Estocástica con Saltos 23
4.4.1. Medida Aleatoria de Conteo, Intensidad y Medida Compensada . . 24
4.4.2. Integración Estocástica respecto a Medidas Aleatorias de Salto . . 26
4.5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Continuas 29
4.5.1. El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico 30
4.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas con Saltos 32
4.7. Herramientas Analíticas Auxiliares 35
4.8. Sistemas Estocásticos Híbridos: Discontinuidades y Cambios de Régimen de Markov 36
4.8.1. Teorema de Existencia y Unicidad para Sistemas Híbridos 38
4.9. Modelo Estocástico Termodinámico (Ornstein-Uhlenbeck Híbrido) 43
4.9.1. Transformación Analítica a la Forma Compensada 44
4.10. Verificación Analítica de la Existencia y Unicidad del Modelo 45

5. Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas **48**
5.1. Tipos de Convergencia 48
5.2. Esquema Numérico de Euler-Maruyama 49

5.3. Esquema Numérico de Milstein 50
5.4. Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte 52
5.5. Esquemas Numéricos para EDES con Cambios de Régimen de Markov . . 54
5.6. Esquemas Numéricos para EDES Híbridas con Cambios de Régimen de Markov y Saltos 56

6. Fundamentos Teóricos Epidemiológicos 59
6.1. Estabilidad Biológica e Integridad de la Red de Frío 59
6.2. Cinética de Degradación Térmica y la Ecuación de Arrhenius 60
6.3. Dinámica de Inventario y Demanda Epidemiológica 61

II. Modelo Matemático 63

7. Estudio de Caso: Parametrización y Calibración del Modelo Matemático 64
7.1. Motivación y Contexto del Estudio 64
7.2. Datos Base e Histórico de Interrupciones Eléctricas 65
7.3. Corrección de Escala Espacial (Factor $\kappa_{espacial}$) 66
7.3.1. Justificación de la Reducción de Escala 66
7.3.2. La Esperanza Matemática Local 66
7.4. Distribución Temporal de las Fallas 67
7.4.1. 1. Índice de la Frecuencia de Interrupción Promedio, en número (SAIFI) 67
7.4.2. 2. Índice de Duración Promedio de Interrupción, en minutos (SAIDI) 67
7.5. Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH) 69
7.5.1. Calibración mediante la Regla Empírica (68-95-99.7) 70
7.5.2. Sistema de Amplitudes Cruzadas (A_1 y A_2) 70
7.6. Validación del Modelo y Análisis de la Anomalía de Enero 72
7.7. Distribución Log-Normal de las Duraciones de las Fallas eléctricas 73
7.7.1. Desglose Mensual de Horas de Interrupción 74
7.7.2. Cálculo de Medias y Varianzas por Temporada Climática 75
7.7.3. Transformación Algebraica a Parámetros Log-Normales 76
7.7.4. Visualización de las Densidades de Probabilidad (PDF) 77
7.8. Planteamiento del Modelo 78
7.9. Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) 81
7.9.1. Régimen 1: Operación Normal ($\alpha(t) = 1$) 82
7.9.2. Régimen 2: Falla Eléctrica ($\alpha(t) = 2$) 84
7.9.3. Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$) 85
7.9.4. Impacto de la Apertura y Salto Térmico (γ_i) 86
7.10. Cinética de Degradación Térmica (Ecuación de Arrhenius) 87
7.10.1. Modelo de Daño Térmico Acumulado y Merma de Inventario . . . 88
7.10.2. Exclusión del Riesgo por Congelamiento ($T < 2^{\circ}$C) 89
7.11. Dinámica de Inventario y Demanda Clínica 89
7.11.1. Capacidad Logística y Reglas de Reabastecimiento 89

7.11.2. Comportamiento Estacional de la Demanda 90
7.11.3. Acoplamiento Estocástico Termodinámico-Logístico 90

III. Simulación del Equipo (Haier HBC-150) 92

8. Simulación Computacional y Análisis de Resultados 93
8.1. Malla Temporal y Clima Exterior 93
8.2. Parametrización Física, Cinética y Estocástica 94
8.2.1. Parámetros Termodinámicos y Biológicos 94
8.2.2. Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$) 96
8.2.3. Riesgo Eléctrico de la CFE 96
8.3. Precalibración de Eventos Externos 97
8.4. Resolución Numérica de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) 98
8.4.1. Integración Numérica por Cambios de Régimen y Saltos 98
8.4.2. Resultados de Seguridad Termodinámica 100
8.4.3. Análisis Comparativo de Trayectorias: Visión Macro (Anual) . . . 101
8.4.4. Análisis Comparativo de Trayectorias: Visión Micro (Acercamiento Mensual) 103
8.5. Integración de la Dinámica Logística y Mermas 103
8.5.1. Resultados del Impacto Logístico 105
8.5.2. Análisis Comparativo del Inventario y Riesgo Materializado 106
8.6. Estructura de la Simulación de Monte Carlo 108
8.7. Resultados Estadísticos y Análisis de Riesgo 108
8.7.1. Riesgo Operativo y Termodinámico Empírico 109
8.7.2. Análisis de Trayectorias 110
8.7.3. Estacionalidad del Riesgo Operativo 113
8.7.4. Distribución del Riesgo Operativo 115
8.7.5. Dispersión y Valores Atípicos (Diagramas de Caja) 115
8.7.6. Análisis de Distribuciones y Prueba de Normalidad 120
8.8. Inferencia Estadística No Paramétrica (Método Bootstrap) 122
8.8.1. Análisis Inferencial de Riesgo (Intervalos al 95 %) 123
8.8.2. Validación Visual de la Inferencia 125
8.8.3. Precisión del Estimador (Dispersión de Medias Bootstrap) 128
8.9. Conclusión de la Simulación y Análisis de Riesgo 128

9. Conclusiones y Trabajo Futuro 130
9.1. Limitaciones del Estudio y Futuros trabajos de investigación 133

Referencias 134

1. Resumen

La preservación de vacunas en la cadena o red de frío requiere estrategias matemáticas rigurosas que anticipen la incertidumbre climática, eléctrica y operativa para mantener los productos biológicos dentro del rango normativo de $[2°C, 8°C]$. En este trabajo se formula, calibra y simula un modelo termodinámico basado en una Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) híbrida para cuantificar el riesgo operativo y la merma anual de biológicos en el refrigerador institucional precalificado Haier HBC-150 en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. El modelo extiende el proceso clásico de Ornstein-Uhlenbeck al incorporar cambios de régimen de Markov para alternar entre el enfriamiento activo y el calentamiento pasivo durante interrupciones del suministro eléctrico, modeladas mediante procesos de Poisson no homogéneos y duraciones con distribuciones Log-Normales estacionales por temporada climática, así como un proceso de Poisson compuesto para los choques térmicos producidos por las aperturas de puerta. Tras demostrar la existencia y unicidad de la solución, el comportamiento térmico se acopla con la cinética de degradación de Arrhenius y un sistema dinámico de inventario con un umbral de reabastecimiento. Para su resolución, se implementa un esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama integrado con simulaciones masivas de Monte Carlo e inferencia estadística no paramétrica Bootstrap bajo tres escenarios operativos: control absoluto, apego normativo y contingencia epidemiológica. Los resultados demuestran que el aislamiento pasivo del equipo amortigua eficazmente las fallas de la red eléctrica, pero que la saturación de aperturas de puerta durante contingencias clínicas colapsa la recuperación térmica y multiplica exponencialmente la pérdida de dosis.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas, cadena de frío, ecuación de Arrhenius, simulación de Monte Carlo, inventario de vacunas.

1.1. Abstract

Vaccine preservation in the cold chain requires rigorous mathematical strategies that anticipate climatic, electrical, and operational uncertainty to maintain biological products within the regulatory range of $[2°C, 8°C]$. In this work, a thermodynamic model based on a hybrid Stochastic Differential Equation (SDE) is formulated, calibrated, and simulated to quantify operational risk and annual biological wastage in the prequalified institutional refrigerator Haier HBC-150 in Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. The model extends the classical Ornstein-Uhlenbeck process by incorporating Markov regime-switching to alternate between active cooling and passive warming during power supply interruptions

modeled through non-homogeneous Poisson processes and seasonal Log-Normal duration distributions by climatic season, as well as a compound Poisson process for thermal shocks produced by door openings. After proving the existence and uniqueness of the solution, the thermal behavior is coupled with Arrhenius degradation kinetics and a dynamic inventory system with a replenishment threshold. For its resolution, a hybrid Euler-Maruyama numerical scheme is implemented, integrated with massive Monte Carlo simulations and non-parametric Bootstrap statistical inference under three operational scenarios: absolute control, regulatory compliance, and epidemiological contingency. The results demonstrate that the passive insulation of the equipment effectively buffers power grid failures, but the saturation of door openings during clinical contingencies collapses thermal recovery and exponentially multiplies dose loss.

Keywords: hybrid stochastic differential equations, cold chain, Arrhenius equation, Monte Carlo simulation, vaccine inventory.

2. Introducción

La preservación de vacunas en condiciones termodinámicas óptimas constituye uno de los problemas mas críticos para la eficacia de los programas de inmunización y la mitigación de brotes epidémicos en salud pública (Organización Mundial de la Salud 2015). Debido a la naturaleza termosensible de sus componentes antigénicos y adyuvantes, los productos biológicos deben resguardarse estrictamente dentro del rango normativo de $[2°\text{C}, 8°\text{C}]$ desde su fabricación hasta su administración clínica. Cualquier desviación de la temperatura fuera de estos límites compromete la integridad del biológico: la exposición a temperaturas inferiores a $0°\text{C}$ provoca la aglomeración irreversible de adyuvantes por congelación, mientras que las desviaciones por encima de los $8°\text{C}$ aceleran exponencialmente la desnaturalización proteica siguiendo una cinética química de primer orden determinada por la ecuación de Arrhenius (Atkins, Paula, y Keeler 2018; Yoshioka y Stella 2000).

En la literatura científica reciente, el modelado matemático de cadenas de suministro médico ha cobrado una relevancia fundamental para anticipar riesgos operativos bajo incertidumbre. En esa línea, (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2025) desarrollaron un modelo integrado de epidemiología matemática y gestión de inventarios que acopla una estructura compartimental de vacunación con fluctuaciones aleatorias en los tiempos de entrega y tamaños de pedido, demostrando que la eficacia en la contención de un brote infeccioso depende directamente de la disponibilidad física del biológico y del mantenimiento de un umbral de reserva. De forma complementaria, (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2026) extendieron este enfoque mediante un problema de control óptimo estocástico durante epidemias, integrando la dinámica compartimental SEIR con la degradación de vacunas impulsada por la temperatura y el reabastecimiento bajo incertidumbre.

Por otra parte, el estudio del comportamiento térmico interno de los equipos de refrigeración requiere modelos físicos capaces de capturar tanto la transferencia de calor como las perturbaciones aleatorias del entorno. Si bien la ley de enfriamiento de Newton describe de manera determinista la transferencia térmica hacia un estado de equilibrio (Vollmer 2009), en el ámbito de la ingeniería térmica (Costanzo et al. 2013) demostraron la eficacia de emplear ecuaciones diferenciales estocásticas continuas basadas en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Karlin y Taylor 1998) para modelar la reversión a la media del termostato y absorber las fluctuaciones difusivas internas mediante el movimiento Browniano (Karatzas y Shreve 1998). Asimismo, desde una perspectiva experimental, los análisis termodinámicos del *National Institute of Standards and Technology* (NIST) realizados por (Chojnacky et al. 2010) evidenciaron que la apertura rutinaria de puertas por parte

del personal clínico y la disposición del balasto térmico producen choques instantáneos de calor que alteran abruptamente la estabilidad de los gabinetes de almacenamiento.

No obstante, dado que en la operación real de una unidad de salud las interrupciones del suministro eléctrico y las aperturas de puerta ocurren en instantes aleatorios con duraciones y magnitudes variables, una difusión continua por sí sola resulta insuficiente para caracterizar la dinámica completa del sistema. Para modelar estos sistemas sujetos simultáneamente a cambios estructurales en su régimen de operación y a perturbaciones discontinuas, la teoría moderna de procesos estocásticos recurre a ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas impulsadas por cadenas de Markov a tiempo continuo (Asmussen 2003; Mao y Yuan 2006; Yin y Zhu 2010) y medidas aleatorias de salto de Poisson (Situ 2005; Platen y Bruti-Liberati 2010). Ante la ausencia de soluciones analíticas cerradas para este tipo de ecuaciones acopladas, la literatura numérica establece el uso de esquemas de discretización temporal de tipo Euler-Maruyama y Milstein combinados con métodos de Simulación de Monte Carlo (Kloeden y Platen 1992; Giles 2008; Wang 2016).

La necesidad de implementar estos modelos matemáticos se intensifica en regiones con climas cálidos extremos y alta vulnerabilidad en su infraestructura eléctrica, como la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. En las unidades médicas locales, las elevadas temperaturas ambientales aceleran la transferencia de calor hacia el interior de los equipos de refrigeración y reducen su autonomía pasiva, interactuando de manera crítica con las fallas recurrentes en la red de distribución de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) (Comisión Federal de Electricidad 2024), marcadas durante las olas de calor primaverales por la saturación de los transformadores y en la temporada de tormentas, y con la infiltración continua de aire cálido exterior cada vez que el personal clínico extrae o resguarda dosis durante las campañas de vacunación.

Por todo lo anterior, el presente trabajo tiene como objetivo formular, calibrar y simular un modelo termodinámico basado en una **Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) Híbrida con Cambios de Régimen de Markov y saltos de Poisson compuestos**, acoplado a la cinética de degradación de Arrhenius y a un sistema dinámico de inventario, con el fin de cuantificar el riesgo operativo en la red de frío de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Tras demostrar analíticamente la existencia y unicidad de la solución, el modelo se calibra para el refrigerador institucional precalificado **Haier HBC-150** (Organización Mundial de la Salud 2024) considerando un filtro físico de inercia térmica para los viales y tres escenarios operativos: control absoluto (Escenario A), apego normativo (Escenario B) y contingencia epidemiológica (Escenario C). Finalmente, mediante un esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama sobre una malla temporal, se haran simulaciones masivas de Monte Carlo, pruebas de bondad de ajuste (Montgomery y Runger 2014) e inferencia no paramétrica Bootstrap (Efron y Tibshirani 1993), se estiman con intervalos de confianza al 95 % las rupturas de la cadena de frío y la merma anual de biológicos para sustentar el diseño de protocolos logísticos en salud pública.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Formular, calibrar y simular un modelo termodinámico basado en **ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas** acoplado a la cinética de degradación de Arrhenius y a la dinámica de inventario, para cuantificar el riesgo operativo y la pérdida de vacunas en la red de frío de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

3.2. Objetivos específicos

1. **Formular y demostrar la existencia y unicidad de una solución fuerte de un modelo termodinámico de Ornstein-Uhlenbeck híbrido**, con cambios de régimen de Markov para el estado del suministro eléctrico y un proceso de Poisson compuesto para las aperturas de puerta, acoplándolo con la cinética de degradación de Arrhenius y el balance dinámico del inventario.
2. **Calibrar los parámetros físicos, eléctricos, cinéticos y logísticos del modelo sobre un escenario operativo real**, utilizando las especificaciones técnicas del refrigerador precalificado **Haier HBC-150**, series meteorológicas locales y los índices oficiales de confiabilidad de la CFE (SAIFI y SAIDI) mediante procesos de Poisson no homogéneos y distribuciones Log-Normales estacionales por temporada climática.
3. **Implementar un esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama con cambios de régimen y saltos en Python**, que integre recursivamente las trayectorias de la temperatura interna del refrigerador, el filtro de inercia térmica de los viales y las reglas de reabastecimiento bajo tres contextos operativos: control absoluto, apego normativo y contingencia epidemiológica.
4. **Cuantificar el riesgo termodinámico y la merma anual de biológicos mediante la Simulación de Monte Carlo e inferencia no paramétrica Bootstrap**, analizando la estacionalidad del daño, la asimetría de las distribuciones con la prueba de Shapiro-Wilk y los intervalos de confianza al 95 % para sustentar recomendaciones operativas para las unidades de salud públicas.

Parte I.

Marco Teórico

4. Fundamentos Teóricos Matemáticos

En este capítulo se presentan las bases conceptuales del cálculo estocástico que fundamentan la construcción y el análisis del modelo matemático propuesto para la red de frío. En primer lugar, se definen los espacios de probabilidad filtrados y los procesos estocásticos fundamentales: martingalas, movimiento Browniano, procesos de Poisson y cadenas de Markov a tiempo continuo. Posteriormente, se desarrolla la teoría de integración estocástica de Itô y la integración respecto a medidas aleatorias de Poisson compensadas, lo que permite formular las ecuaciones diferenciales estocásticas continuas, en particular el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y aquellas perturbadas por saltos. Finalmente se demuestra el teorema general de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas con saltos y conmutación markoviana, concluyendo con la verificación analítica de que el modelo matemático propuesto tiene una única solución fuerte.

4.1. Espacios de Probabilidad, Filtraciones y Procesos Estocásticos

El modelado térmico de un refrigerador de vacunas expuesto a incertidumbres continuas y perturbaciones discretas requiere herramientas más allá del cálculo determinista. Desde una perspectiva analítica, un proceso estocástico representa la generalización de una variable aleatoria indexada en un conjunto ordenado, parametrizando la evolución de un sistema bajo incertidumbre.

Definición 4.1 (Espacio de Probabilidad Filtrado)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia no decreciente de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para todo $0 \leq s \leq t$. La cuaterna $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ se denomina espacio de probabilidad filtrado. Se asumira que la filtración satisface las *condiciones habituales*:

1. $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos de $\mathcal{F}$.
2. La filtración es continua por la derecha, i.e: $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ para todo $t \geq 0$.

Intuitivamente, la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ representa el historial completo de información observable del sistema físico (temperaturas, fallos eléctricos, aperturas de puertas) hasta el instante t.

Definición 4.2 (Proceso Estocástico)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d$ un espacio de estados dotado de su respectiva σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ parametrizadas por $t \in \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, es decir, es una función medible $X : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathcal{S}$.

Dependiendo de cómo es el conjunto de índices $\mathcal{T}$, los procesos estocásticos se clasifican en dos:

1. **Procesos estocásticos a tiempo discreto:** Si $\mathcal{T}$ es numerable, por lo general $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, se dice que el proceso estocástico es a tiempo discreto. En este escenario, el sistema evoluciona mediante transiciones en pasos fijos discretizados.
2. **Procesos estocásticos a tiempo continuo:** Si $\mathcal{T}$ es un intervalo continuo de $\mathbb{R}$, por lo general $\mathcal{T} = [0, \infty)$ o un intervalo acotado $\mathcal{T} = [0, T]$ con $T > 0$, el proceso estocástico es a tiempo continuo. Esta estructura es la adecuada para modelar fenómenos físicos continuos en el dominio temporal, como el comportamiento de transferencia térmica.

Para enlazar la teoría probabilística con la observación empírica de un fenómeno aleatorio, es indispensable establecer la distinción entre el espacio funcional del proceso y sus realizaciones particulares.

Definición 4.3 (Trayectorias del Proceso Estocástico)**.** Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico a tiempo continuo, para cada $\omega \in \Omega$ fijo y asumiendo $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, se definen las trayectorias del proceso como:

$$\mathcal{T} = [0, \infty) \to \mathcal{S} = \mathbb{R}$$

$$t \to X_t(\omega).$$

Para la formulación rigurosa de integrales estocásticas (tanto respecto a difusiones como a medidas de salto), el proceso debe respetar la causalidad de la información, lo cual se formaliza mediante la adaptabilidad y la medibilidad progresiva.

Definición 4.4 (Proceso Adaptado, Medibilidad Progresiva y el Espacio Càdlàg)**.** Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es **adaptado** a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Un requisito analítico más riguroso para la integración es la *medibilidad progresiva*, donde la aplicación $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ sobre el espacio producto $[0, t] \times \Omega$ es medible respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Adicionalmente, diremos que el proceso pertenece al **espacio càdlàg** (del francés *continue à droite, limite à gauche*) si sus trayectorias $t \mapsto X_t(\omega)$ son continuas por la derecha y poseen límites finitos por la izquierda para casi todo $\omega \in \Omega$.

La restricción de trayectorias *càdlàg* es un requisito analítico indispensable en nuestra investigación, puesto que las perturbaciones de la red de frío por aperturas de puerta inducen discontinuidades instantáneas (saltos finitos) en la temperatura.

Finalmente, para evaluar eventos estructurales que ocurren en tiempos aleatorios (como fallas abruptas de energía de la red pública), requerimos el concepto de tiempo de paro.

Definición 4.5 (Tiempo de Paro)**.** Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ es un tiempo de paro respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, para todo instante $t \geq 0$, la ocurrencia del evento estocástico antes o en el tiempo t depende únicamente de la información histórica disponible hasta ese instante; matemáticamente: $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

4.2. Componentes Estocásticos Fundamentales

Las propiedades analíticas de un proceso estocástico, tales como la continuidad, la diferenciabilidad y la presencia de discontinuidades finitas, se definen estrictamente a partir del comportamiento de sus trayectorias, para más detalles consultar (Karlin y Taylor 1998). Los componentes aleatorios de nuestro sistema se sustentan en una clase específica de procesos estocásticos a tiempo continuo.

Definición 4.6 (Martingala)**.** Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{M_t\}_{t\geq 0}$, integrable (i.e., $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ para todo t) y adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, es una martingala si cumple la propiedad de valor esperado condicional nulo para los incrementos futuros:

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s, \quad \text{casi seguramente para todo } 0 \leq s \leq t.$$

La condición de martingala implica la ausencia de tendencia predictible (representa matemáticamente un "juego justo").

4.2.1. Movimiento Browniano (Proceso de Wiener)

Para representar las fluctuaciones térmicas continuas de baja intensidad asociadas al ruido intrínseco del termostato y microtransferencias de calor se utiliza el movimiento Browniano.

Definición 4.7 (Proceso de Wiener)**.** Un proceso estocástico a tiempo continuo real-valuado $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ es un movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener si cumple con las siguientes propiedades:

1. $W(0) = 0$ con probabilidad 1.

2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, las variables aleatorias $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios gaussianos, es decir:

$$W(t+h) - W(s+h) \sim W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s), \ \forall 0 \leq s < t, \ \forall h > 0.$$

El diferencial del proceso de Wiener, denotado como $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$, representa una perturbación en un intervalo infinitesimal dt, caracterizada por una media $\mathbb{E}[dW(t)] = 0$ y una varianza $\mathbb{E}[(dW(t))^2] = dt$. Un rasgo crítico del movimiento Browniano, es que, aunque sus trayectorias son continuas, **no son diferenciables en ningún punto** con probabilidad 1. Esta restricción analítica invalida el uso del cálculo tradicional de Newton-Leibniz e impone la necesidad del cálculo de Itô. Para una revisión detallada de estas construcciones analíticas, se sugiere consultar a (Karatzas y Shreve 1998).

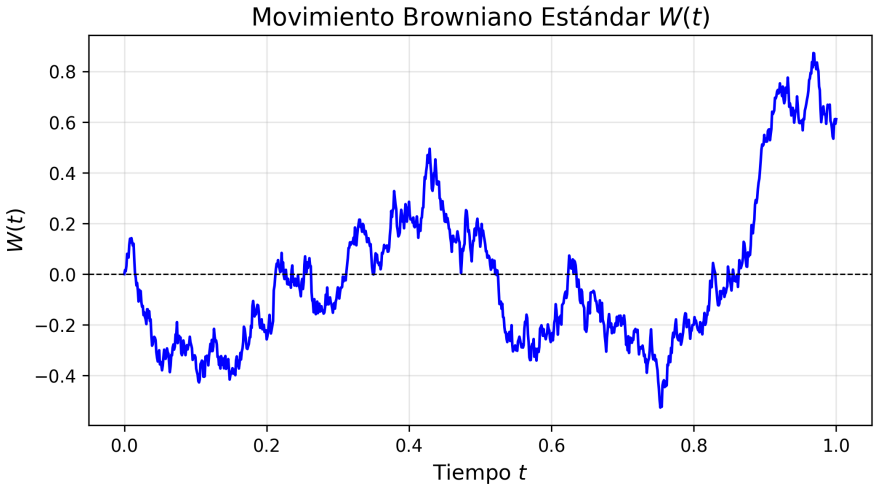


Figura 4.1.: Trayectoria simulada del proceso de Wiener. El eje horizontal representa el avance del tiempo en un horizonte parametrizado de $T = 1.0$ con incrementos de $dt = 0.001$. El eje vertical denota la posición de las fluctuaciones aleatorias $W(t)$, iniciando en el origen $W(0) = 0$.

4.2.2. Procesos de Poisson y Discontinuidades por Saltos

Las aperturas de las puertas del refrigerador por el personal médico constituyen eventos que, por su naturaleza física temporal, no son continuos. Representan inyecciones discretas, repentinas y finitas de aire cálido al sistema, alterando la temperatura instantáneamente. El modelo matemático de tales eventos discretos recae en la familia de los procesos de conteo y saltos puros (Ross 1996).

Definición 4.8 (Proceso de Poisson Homogéneo)**.** Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ que toma valores enteros en el espacio de estados $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro de intensidad constante $\lambda > 0$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$ con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes; es decir, para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, las variables aleatorias discretas $N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ son mutuamente independientes.
3. Posee incrementos estacionarios; lo que implica que la ley de probabilidad de cualquier incremento $N(t+s) - N(s)$ depende únicamente de la amplitud temporal t y resulta invariante ante traslaciones sobre el origen cronológico s. De forma explícita, la variable aleatoria $N(t)$ sigue una distribución de Poisson con parámetro o tasa media dada por el producto λt, es decir:

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

De manera asintótica local, las probabilidades de transición en un incremento infinitesimal $h > 0$ están rigurosamente caracterizadas por:

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h), \quad \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

Donde la notación algebraico-asintótica de Landau $o(h)$ denota una función de orden superior tal que $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Esto garantiza que la probabilidad de ocurrencia de múltiples eventos simultáneos en una fracción temporal infinitesimal es prácticamente nula.

Sin embargo, en la dinámica real de un centro de salud, la tasa de aperturas del refrigerador no es constante; exhibe una estacionalidad diaria (por ejemplo, mayor actividad en horas pico o contingencias). Para capturar esta variabilidad, generalizamos el modelo quitando la propiedad de incrementos estacionarios.

Definición 4.9 (Proceso de Poisson No Homogéneo)**.** Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) \geq 0$ localmente integrable para todo $t \geq 0$ si satisface las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$ con probabilidad 1.
2. Posee incrementos independientes y la variable aleatoria de incremento $N(t) - N(s)$ (con $0 \leq s < t$) sigue a una distribución de Poisson con parámetro integral acumulado $\Lambda(s,t) = \int_s^t \lambda(u)du$.

3. Para todo $t \geq 0$ y $h > 0$, la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo $(t, t+h]$ está dada por la tasa instantánea en el tiempo t:

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$$

4. La probabilidad de observar dos o más eventos en dicho intervalo es de orden superior a h:

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

El proceso de conteo nos indica *cuándo* ocurren los eventos. Para acoplar la magnitud física real del evento (cuanto aumenta la temperatura interna del refrigerador por la apertura de puerta), debemos componer el proceso de conteo con magnitudes aleatorias discretas.

Definición 4.10 (Proceso de Poisson Compuesto)**.** Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$, y sea $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) que representan la magnitud de los saltos de los eventos, y que son estrictamente independientes de $N(t)$. El proceso de Poisson compuesto $J(t)$ acumula la magnitud de estos saltos en el tiempo y se define como:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \gamma_i$$

4.2.3. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo

Los fallos prolongados en el suministro eléctrico de la red pública alteran el comportamiento de la temperatura interna del refrigerador. Para modelar estas transiciones entre estados macroscópicos del entorno, introducimos una cadena de Markov a tiempo continuo.

Definición 4.11 (Cadena de Markov a Tiempo Continuo)**.** Sea $\{\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que toma valores en un espacio de estados finito y discreto $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$. Se dice que el proceso $\alpha(t)$ es una cadena de Markov a tiempo continuo si para todo $s, t \geq 0$ y estados $i, j \in \mathcal{M}$, se satisface la propiedad de pérdida de memoria de Markov:

$$\mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i, \alpha(u) = \alpha_u, 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(\alpha(t+s) = j \mid \alpha(s) = i)$$

Las leyes de transición y la evolución temporal de las probabilidades de estado de la cadena $\{\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ se encuentran completamente caracterizadas por la matriz de intensidades de transición $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Si definimos las funciones de probabilidad de transición condicional mediante $p_{ij}(h) = \mathbb{P}(\alpha(t+h) = j \mid \alpha(t) = i)$ para un incremento temporal positivo $h > 0$, las componentes de la matriz Q se determinan evaluando el límite analítico en el origen:

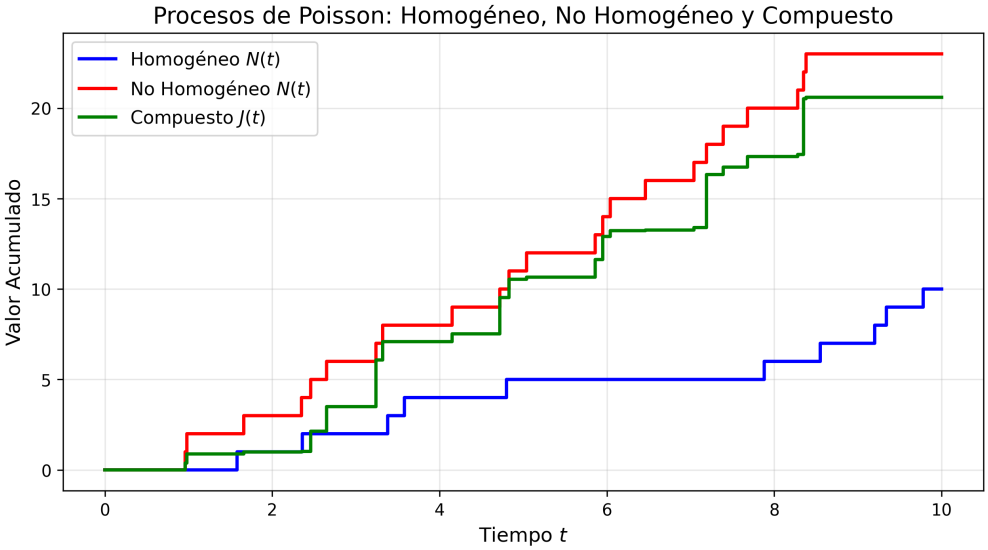


Figura 4.2.: Trayectorias simuladas de las tres variantes del proceso de Poisson. El eje horizontal representa el avance del tiempo en un horizonte de $T = 10.0$ con incrementos discretos de $dt = 0.01$. El eje vertical contabiliza la evolución del estado. La línea azul representa un Proceso de Poisson Homogéneo con una tasa de intensidad constante $\lambda = 1.0$, caracterizado por eventos de saltos estrictamente unitarios. La línea roja representa un Proceso de Poisson No Homogéneo cuya función de intensidad está dada por $\lambda(t) = 1 + \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$, es decir es dependiente del tiempo, concentrando una mayor cantidad de saltos unitarios en el periodo central temporal. Por ultimo, la línea verde representa un Proceso de Poisson Compuesto $J(t)$ construido exactamente con la misma función de intensidad y los mismos instantes de salto que el proceso no homogéneo; sin embargo, en lugar de acumular una constante unitaria por evento, la magnitud de cada salto γ_i es extraída de una distribución Exponencial con parámetro $\beta = 1.0$ (i.e., $\gamma_i \sim \text{Exp}(1.0)$). Esta superposición evidencia cómo, a pesar de que los eventos ocurren simultáneamente, las magnitudes aleatorias provoca que el proceso compuesto crezca a un ritmo asimétrico, generando escalones de impacto severo intercalados con alteraciones menores, finalmente se ve que todas las trayectorias son càdlàg.

1. Para transiciones entre estados distintos ($i \neq j$), la componente q_{ij} representa la tasa instantánea o intensidad de conmutación desde el régimen i hacia el régimen j, definida como:

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0$$

2. Para los elementos que se encuentran en la diagonal principal ($i = j$), la componente q_{ii} representa la tasa neta de salida del estado i, cumpliendo por conservación de la probabilidad que la suma por filas de la matriz Q sea idénticamente nula se tiene que:

$$q_{ii} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

A través de esta formulación basada en límites, las probabilidades de transición de primer orden quedan descritas mediante las expresiones $p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$ para $i \neq j$, y $p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$. Esto permite modelar las conmutaciones macroscópicas de la dinámica del refrigerador sin necesidad de introducir variables temporales discretas ni heurísticas. Las propiedades asintóticas y de estabilidad de estos procesos híbridos se encuentran en (Asmussen 2003).

4.3. Teoría de Integración Estocástica de Itô

Para darle significado analítico a las ecuaciones diferenciales perturbadas por ruido continuo, es necesario ver la integración respecto al movimiento Browniano. En el cálculo determinista clásico, una integral de la forma $\int_0^T X(t)dg(t)$ puede definirse trayectoria por trayectoria en el sentido de Riemann-Stieltjes o Lebesgue-Stieltjes siempre que la función integradora $g(t)$ sea de variación finita (acotada) en el intervalo $[0, T]$.

Sin embargo, como se estableció previamente, las trayectorias del proceso de Wiener $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ no son diferenciables en ningún punto y poseen **variación total infinita (no acotada)** sobre cualquier intervalo temporal finito con probabilidad 1; esto es, para una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, se cumple que:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |W(t_{i+1}) - W(t_i)| = \infty \quad \text{casi seguramente.}$$

Esta propiedad impide definir la integral $\int_0^T X(t)dW(t)$ trayectoria por trayectoria para cada $\omega \in \Omega$. No obstante, el movimiento Browniano posee **variación cuadrática finita**

e igual a la longitud del intervalo temporal, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 = T \quad \text{en } L^2(\Omega, \mathbb{P}).$$

Aprovechando esta propiedad de segundo momento y la independencia de los incrementos, K. Itô construyó la integral estocástica no como un límite puntual para cada trayectoria individual, sino como un límite en media cuadrática dentro de un espacio de funciones cuadrado-integrables (Mao y Yuan 2006; Situ 2005).

4.3.1. Construcción de la Integral de Itô e Isometría

Denotemos por $\mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R})$ al espacio de los procesos estocásticos real-valuados $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ que son progresivamente medibles respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y que satisfacen la condición de integrabilidad en media cuadrática:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X(t)|^2 dt\right] < \infty.$$

La construcción de la integral procede inicialmente sobre procesos simples (escalonados) adaptados de la forma $X_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$, donde cada variable aleatoria ξ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Dado que el conjunto de procesos simples es denso en $\mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R})$, el operador integral se extiende por continuidad a cualquier proceso de dicho espacio mediante el siguiente límite.

Definición 4.12 (Integral de Itô)**.** Sea $\{X(t)\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R})$ y sea $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sea $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[0,T]$ cuya norma $N_{\Pi_n} = \max_{0\leq i\leq n-1}(t_{i+1} - t_i)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$. La integral de Itô de $X(t)$ respecto a $W(t)$ en el intervalo $[0,T]$ se define como el límite en media cuadrática en el espacio $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de las sumas parciales evaluadas en el extremo izquierdo de cada subintervalo, es decir:

$$\int_0^T X(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] \quad \text{en } L^2(\Omega, \mathbb{P}),$$

lo que significa explícitamente que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T X(t)dW(t) - \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]\right|^2\right] = 0.$$

El hecho de evaluar el integrando $X(t_i)$ estrictamente en el instante inicial t_i de cada incremento $\Delta W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ garantiza que el integrando no anticipe información futura. Dado que $X(t_i)$ es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y el incremento $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}$, el valor esperado de cada término de la suma se factoriza como $\mathbb{E}[X(t_i)]\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0$. En consecuencia, la integral definida $I(t) = \int_0^t X(s)dW(s)$ hereda la estructura de una **martingala continua de cuadrado integrable** respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, satisfaciendo la propiedad de media nula:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)dW(t)\right] = 0.$$

Asimismo, la independencia entre incrementos sobre subintervalos disjuntos anula las covarianzas cruzadas al elevar la suma al cuadrado, dando lugar a una identidad fundamental para calcular la varianza de la integral estocástica (Karatzas y Shreve 1998; Mao y Yuan 2006).

Teorema 4.1 (Isometría de Itô para el Movimiento Browniano)**.** *Para todo proceso estocástico* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R})$*, el segundo momento de su integral de Itô coincide exactamente con la esperanza de la integral ordinaria de Riemann del proceso al cuadrado respecto al tiempo:*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T X(t)dW(t)\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |X(t)|^2 dt\right].$$

Esta identidad permite transformar el cálculo de momentos de integrales estocásticas en integrales deterministas respecto al tiempo, lo cual resulta esencial para acotar errores y demostrar teoremas de existencia y unicidad.

4.4. Teoría de Medidas Aleatorias e Integración Estocástica con Saltos

A diferencia del movimiento Browniano cuyas trayectorias cambian continuamente con variación no acotada, los procesos de conteo y de saltos puros (como el proceso de Poisson compuesto $J(t)$) permanecen constantes entre eventos sucesivos y solo experimentan un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo acotado $[0, T]$. Por consiguiente, sus trayectorias son funciones escalonadas de **variación finita (acotada)**.

Esta regularidad implica que la integración respecto a un proceso de saltos sí puede definirse trayectoria por trayectoria en el sentido de Lebesgue-Stieltjes (o Riemann-Stieltjes), reduciéndose de manera natural a una suma finita evaluada en los instantes

donde ocurren los saltos. Sin embargo, en un sistema físico sujeto a choques aleatorios, cada evento discreto no solo queda determinado por el instante en que sucede, sino también por el tamaño o magnitud aleatoria del impacto. Para representar analíticamente perturbaciones cuyos efectos dependen tanto del tiempo como de la magnitud del salto, y poder aplicar la teoría de martingalas en ecuaciones diferenciales estocásticas, es necesario formular los procesos de salto mediante **medidas aleatorias de Poisson** (Situ 2005).

4.4.1. Medida Aleatoria de Conteo, Intensidad y Medida Compensada

Consideremos una sucesión de eventos discretos aleatorios definidos sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Cada evento individual k-ésimo ($k \in \mathbb{N}$) se representa mediante un par ordenado de variables aleatorias:

$$(T_k, \gamma_k),$$

donde:

1. $T_k \in (0, \infty)$, con $0 < T_1 < T_2 < ...$, denota el **instante aleatorio** en el que ocurre el k-ésimo salto.
2. $\gamma_k \in \mathcal{Z}$ se denomina la **marca** del evento y cuantifica la **magnitud aleatoria** del salto ocurrido en el instante T_k. El conjunto $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dotado de su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$, constituye el espacio medible de marcas.

Mientras que un proceso de Poisson ordinario $N(t)$ cuenta únicamente cuántos eventos ocurrieron hasta el instante t sin distinguir su magnitud, una medida aleatoria de conteo clasifica y contabiliza los saltos simultáneamente según el intervalo temporal en que ocurren y el rango de valores al que pertenece su magnitud.

Definición 4.13 (Medida Aleatoria de Conteo de Poisson)**.** Sea $(\mathcal{Z}, \mathcal{B}(\mathcal{Z}))$ el espacio medible de marcas y sea $\{(T_k, \gamma_k)\}_{k\geq 1}$ la sucesión de tiempos de ocurrencia y magnitudes de un proceso de saltos adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Para cualquier intervalo temporal $(s, t] \subset [0, \infty)$ y cualquier subconjunto medible de magnitudes $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$, el conteo aleatorio de eventos en la región producto $(s, t] \times A$ se define mediante la suma de funciones indicadoras:

$$N((s, t] \times A) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{s<T_k\leq t,\, \gamma_k\in A\}},$$

donde $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ toma el valor 1 si el k-ésimo salto ocurre dentro del intervalo de tiempo $(s, t]$ y su magnitud γ_k pertenece al conjunto A, y toma el valor 0 en caso contrario. Se dice que N es una **medida aleatoria de conteo de Poisson** sobre $[0, \infty) \times \mathcal{Z}$ si:

1. Para cada conjunto medible $B \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ con esperanza finita, la variable aleatoria entera $N(B)$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $\mathbb{E}[N(B)]$.

2. Para cualesquiera regiones disjuntas $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{Z})$, las variables aleatorias de conteo $N(B_1), N(B_2), \ldots, N(B_m)$ son mutuamente independientes.

En notación diferencial de teoría de la medida, se escribe $N(dt, dz)$ para denotar la medida de conteo infinitesimal sobre el elemento de tiempo dt y el elemento de magnitud dz, de manera que:

$$N((s,t] \times A) = \int_s^t \int_A N(du, dz).$$

Intuitivamente, el diferencial $N(dt, dz)$ actúa como un detector puntual aleatorio: vale 1 si exactamente en el instante infinitesimal dt se presenta un salto cuya magnitud se ubica en torno a $z \in dz$, y vale 0 si no ocurre ningún salto de tales características.

Dado que $N((0,t] \times A)$ acumula conteos enteros no negativos a medida que avanza el tiempo, es un proceso monótonamente creciente. En consecuencia, su esperanza es estrictamente positiva ($\mathbb{E}[N((0,t] \times A)] > 0$) y no constituye una martingala. Para caracterizar el valor esperado de estos conteos, se introduce la medida de intensidad.

Definición 4.14 (Medida de Intensidad)**.** Sea $N(dt, dz)$ una medida aleatoria de conteo de Poisson. La **medida de intensidad** asociada a N es la medida determinista ν definida sobre $[0,\infty) \times \mathcal{Z}$ que asigna a cada región temporal y espacial el número esperado de saltos:

$$\nu((s,t] \times A) = \mathbb{E}\left[N((s,t] \times A)\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_A N(du, dz)\right].$$

Si los instantes de ocurrencia de los eventos siguen un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) \geq 0$ localmente integrable, y las magnitudes de los saltos $\{\gamma_k\}_{k\geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada $F(z) = \mathbb{P}(\gamma_k \leq z)$ (independientes de los tiempos de salto), la medida de intensidad en forma diferencial se factoriza como:

$$\nu_t(dz)dt = \mathbb{E}\left[N(dt, dz)\right] = \lambda(t) dF(z) dt,$$

donde $dF(z)$ representa la medida de probabilidad inducida por la distribución de las magnitudes de salto (si las marcas poseen función de densidad $f(z)$, entonces $dF(z) = f(z)dz$). De este modo, el número esperado de saltos en $(s,t]$ con magnitud en A viene dado por:

$$\mathbb{E}\left[N((s,t] \times A)\right] = \int_s^t \int_A \nu_u(dz)du = \left(\int_s^t \lambda(u)du\right)\left(\int_A dF(z)\right).$$

En esta factorización, el término $\lambda(t)dt$ cuantifica la probabilidad infinitesimal de que ocurra un salto en el instante t, mientras que $dF(z)$ determina la probabilidad de que dicho salto tenga una magnitud de tamaño z.

Debido a que la medida de conteo $N(dt, dz)$ posee una tendencia media creciente dada por $\nu_t(dz)dt$, integrarla directamente introduce un arrastre determinista en el sistema. Para separar la fluctuación puramente aleatoria de su tendencia media y obtener un integrador con la propiedad de martingala de forma análoga al diferencial Browniano $dW(t)$, se centra la medida aleatoria restándole su valor esperado (Situ 2005).

Definición 4.15 (Medida Aleatoria de Poisson Compensada)**.** Sea $N(dt, dz)$ una medida aleatoria de conteo de Poisson con medida de intensidad $\nu_t(dz)dt = \lambda(t)dF(z)dt$. Se define la **medida aleatoria de Poisson compensada**, denotada por $\tilde{N}(dt, dz)$, como la diferencia entre la medida de conteo observada y su medida de intensidad esperada:

$$\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu_t(dz)dt = N(dt, dz) - \lambda(t)dF(z)dt.$$

Para cualquier subconjunto de marcas $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Z})$ tal que $\mathbb{E}[N((0, t] \times A)] < \infty$, el proceso compensado evaluado en $[0, t]$:

$$\tilde{N}((0, t] \times A) = \int_0^t \int_A \tilde{N}(ds, dz) = N((0, t] \times A) - \int_0^t \int_A \lambda(s)dF(z)ds$$

constituye una martingala centrada de cuadrado integrable respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, cumpliendo para todo $t \geq 0$ que:

$$\mathbb{E}\left[\tilde{N}((0, t] \times A)\right] = 0.$$

4.4.2. Integración Estocástica respecto a Medidas Aleatorias de Salto

Una vez definidas las medidas $N(dt, dz)$ y $\tilde{N}(dt, dz)$, procedemos a establecer cómo se integran funciones y procesos estocásticos respecto a ellas. En la teoría de integración con saltos, es fundamental exigir que el integrando no dependa del valor exacto del salto en el mismo instante en que este ocurre, sino únicamente de la información disponible inmediatamente antes del salto. Esta propiedad de causalidad se formaliza mediante el concepto de predecibilidad (Mao y Yuan 2006; Situ 2005).

Definición 4.16 (Proceso e Integrando Predecible)**.** Sea $\mathcal{P}$ la σ-álgebra sobre el espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$ generada por todos los procesos estocásticos adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ cuyas trayectorias son continuas por la izquierda. Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ se denomina **predecible** si la aplicación $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ es medible respecto a $\mathcal{P}$ (en particular, todo proceso adaptado con trayectorias continuas por la izquierda, tal como $X(t^-)$, es predecible).

De manera más general, una función aleatoria dependiente de las marcas $H : [0, \infty) \times \mathcal{Z} \times \Omega \to \mathbb{R}$ se denomina un **integrando predecible** si es medible respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{Z})$; esto es, si para cada marca $z \in \mathcal{Z}$ fija, el proceso $t \mapsto H(t, z, \omega)$ es predecible.

Puesto que en cualquier intervalo finito $[0,T]$ ocurre casi seguramente un número finito de saltos en los instantes T_k con marcas γ_k, la integral de un proceso respecto a la medida de conteo $N(dt,dz)$ se calcula directamente trayectoria por trayectoria como una suma finita de Lebesgue-Stieltjes evaluada en los puntos de discontinuidad.

Definición 4.17 (Integral Estocástica respecto a la Medida de Conteo de Poisson)**.** Sea $H(t,z,\omega)$ un integrando predecible tal que $\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|N(dt,dz) < \infty$ casi seguramente. La integral estocástica de H respecto a la medida aleatoria de conteo $N(dt,dz)$ en el intervalo $[0,T]$ se define trayectoria por trayectoria como la suma finita de las contribuciones evaluadas en los pares de tiempo y magnitud de salto (T_k,γ_k) observados hasta el instante T:

$$\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)N(dt,dz) = \sum_{0<T_k\leq T} H(T_k,\gamma_k).$$

Si además el integrando satisface la condición de integrabilidad $\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|\nu_t(dz)dt\right] < \infty$, entonces el valor esperado de la integral de conteo coincide con la esperanza de la integral respecto a la medida de intensidad:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)N(dt,dz)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)\nu_t(dz)dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)\left(\int_{\mathcal{Z}} H(t,z)dF(z)\right)dt\right].$$

Nótese que si se elige la función constante $H(t,z) = \mathbf{1}_A(z)$, la definición anterior recupera exactamente el conteo de eventos $N((0,T]\times A)$; en cambio, si $H(t,z)$ depende de z, la integral acumula el impacto ponderado de cada salto ocurrido en $[0,T]$.

A partir de esta expresión, cuando el integrando satisface la condición de integrabilidad anterior, la integral respecto a la medida compensada $\tilde{N}(dt,dz)$ se define de manera directa restando a la suma de saltos observados su integral de compensación determinista:

$$\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)\tilde{N}(dt,dz) = \int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)N(dt,dz) - \int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)\nu_t(dz)dt.$$

Al igual que en la integral de Itô clásica, esta definición se extiende por densidad en media cuadrática a la clase general de integrandos predecibles de cuadrado integrable respecto a la medida de intensidad (Situ 2005).

Definición 4.18 (Integral Estocástica respecto a la Medida de Poisson Compensada)**.** Sea $H(t,z,\omega)$ un integrando predecible respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ que pertenece al espacio de cuadrado integrable respecto a la medida de intensidad; esto es, que satisface para todo $T>0$ la condición:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|^2\nu_t(dz)dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)\left(\int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|^2 dF(z)\right)dt\right] < \infty.$$

Entonces, el proceso de integral estocástica compensada:

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathcal{Z}} H(s,z)\tilde{N}(ds,dz), \quad t \in [0,T],$$

está bien definido en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ y constituye una martingala de cuadrado integrable con trayectorias càdlàg respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, cuya esperanza es idénticamente nula:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)\tilde{N}(dt,dz)\right] = 0.$$

De forma analoga al Movimiento Browniano, la integral respecto a la medida aleatoria de Poisson compensada posee una propiedad de isometría en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ que relaciona su varianza con una integral determinista respecto al compensador $\nu_t(dz)dt$ (Situ 2005).

Teorema 4.2 (Isometría de Itô para la Medida Compensada)**.** *Para todo integrando predecible $H(t,z,\omega)$ tal que $\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|^2 \nu_t(dz)dt\right] < \infty$, el segundo momento de la integral estocástica respecto a la medida compensada $\tilde{N}(dt,dz)$ satisface la identidad:*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} H(t,z)\tilde{N}(dt,dz)\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|^2 \nu_t(dz)dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)\left(\int_{\mathcal{Z}} |H(t,z)|^2 dF(z)\right)dt\right].$$

Con este marco de integración establecido, podemos enunciar el lema que vincula al proceso de Poisson compuesto definido en la sección anterior Definición 4.10 con las integrales estocásticas respecto a medidas aleatorias de salto.

Lema 4.1 (Lema de Equivalencia del Proceso de Poisson Compuesto)**.** *Sea $J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \gamma_i$ un proceso de Poisson compuesto donde $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) \geq 0$, y $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F(z)$ y media finita $\mathbb{E}[|\gamma_i|] < \infty$, independientes de $N(t)$. Entonces, el proceso $J(t)$ admite la siguiente representación integral respecto a la medida aleatoria de conteo $N(dt,dz)$:*

$$J(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} zN(ds,dz), \quad \textit{o en forma diferencial,} \quad dJ(t) = \int_{\mathbb{R}} zN(dt,dz).$$

En consecuencia, sustituyendo la relación de la medida compensada $N(dt,dz) = \tilde{N}(dt,dz) + \lambda(t)dF(z)dt$, el diferencial del proceso de Poisson compuesto se descompone en el diferencial de una martingala de salto compensado (de media cero) más un término de deriva determinista proporcional al tamaño esperado del salto:

$$dJ(t) = \int_{\mathbb{R}} z\tilde{N}(dt,dz) + \left(\lambda(t)\int_{\mathbb{R}} z dF(z)\right)dt = \int_{\mathbb{R}} z\tilde{N}(dt,dz) + \lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i]dt.$$

Esta equivalencia (Lema 4.1) es fundamental para nuestra investigación, ya que nos permitirá reescribir la ecuación diferencial estocástica para el refrigerador de vacunas planteada originalmente mediante incrementos del proceso de Poisson compuesto $dJ(t)$ en la forma canónica de una EDE impulsada por martingalas ($\tilde{N}(dt, dz)$ y $dW(t)$), requisito indispensable para aplicar los teoremas de existencia y unicidad de R. Situ (Situ 2005).

4.5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Continuas

Una vez definida la integral de Itô, es posible formular ecuaciones que combinan una dinámica determinista con perturbaciones aleatorias continuas.

Definición 4.19 (Ecuación Diferencial Estocástica Clásica)**.** Una ecuación diferencial estocástica (EDE) continua para un proceso $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ es una relación expresada en su forma diferencial mediante:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{4.5.1}$$

donde $b(t, X(t))$ denota el coeficiente de deriva y $\sigma(t, X(t))$ representa el coeficiente de difusión.

Dado que el movimiento Browniano no es diferenciable, el término $dX(t)$ en la Ecuación 4.5.1 no representa una derivada ordinaria, sino una notación abreviada de su ecuación integral equivalente:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s). \tag{4.5.2}$$

En la Ecuación 4.5.2, la primera integral es una integral ordinaria de Riemann respecto al tiempo que captura la tendencia determinista del sistema, mientras que la segunda es una integral de Itô que modela la acumulación del ruido continuo. Para una revisión detallada del cálculo estocástico elemental, se sugiere consultar a (Karatzas y Shreve 1998).

Para asegurar que una EDE tenga solución y sea única y bien definida en todo su dominio temporal, los coeficientes de deriva y difusión deben satisfacer las restricciones del siguiente teorema.

Teorema 4.3 (Teorema Clásico de Existencia y Unicidad)**.** *Sea la EDE definida en la Ecuación 4.5.1 con una condición inicial $X(0) = x_0$, medible respecto a $\mathcal{F}_0$ e independiente del proceso de Wiener $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, tal que $\mathbb{E}[|x_0|^2] < \infty$. Supóngase que para todo $t \in [0, T]$ y cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, los coeficientes satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. ***Condición de Lipschitz Global:*** *Existe una constante* $L > 0$ *tal que:*

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq L|x-y|^2$$

2. ***Condición de Crecimiento Lineal:*** *Existe una constante* $K > 0$ *tal que:*

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2)$$

Bajo el cumplimiento de ambas condiciones, existe una única solución fuerte $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *adaptada a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*, con trayectorias continuas con probabilidad 1 y tal que* $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right] < \infty$*. Una demostración detallada de este teorema, basada en el método de iteraciones sucesivas de Picard, se encuentra en (Arnold 1974).*

En este resultado, la condición de Lipschitz garantiza que dos trayectorias con la misma condición inicial sean indistinguibles (unicidad fuerte), mientras que la condición de crecimiento lineal acota la tasa de cambio de los coeficientes para evitar que la solución diverja a infinito en un tiempo finito (existencia global).

Para evaluar funciones diferenciables que dependen de la solución de una EDE continua, la regla de la cadena del cálculo ordinario se sustituye por el Lema de Itô.

Teorema 4.4 (Lema de Itô para Difusiones Continuas)**.** *Sea* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico que satisface la Ecuación 4.5.1, y sea* $f(t,x)$ *una función escalar continuamente diferenciable respecto a* t *(*$\mathcal{C}^1$*) y dos veces continuamente diferenciable respecto a* x *(*$\mathcal{C}^2$*). Entonces el proceso compuesto* $f(t,X(t))$ *satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$df(t,X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t)) + b(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,X(t))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\right]dt + \sigma(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))dW$$

A diferencia del cálculo clásico, aparece el término adicional de segundo orden $\frac{1}{2}\sigma^2(t,X(t))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt$. Este término proviene de que la variación cuadrática del movimiento Browniano no es nula, por lo que en una expansión de Taylor los incrementos cuadráticos aportan una contribución de primer orden temporal, cumpliendo la regla operacional $(dW(t))^2 = dt$.

4.5.1. El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Clásico

Como paso previo al desarrollo del modelo termodinámico híbrido, se introduce una EDE lineal que modela sistemas físicos con retorno hacia un estado de equilibrio: el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Definición 4.20 (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck)**.** Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal:

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = x_0, \tag{4.5.3}$$

donde $\kappa > 0$ representa la tasa de reversión a la media, $\theta \in \mathbb{R}$ denota el nivel de equilibrio a largo plazo y $\sigma > 0$ es el coeficiente de difusión constante.

La característica principal de la Ecuación 4.5.3 radica en su deriva lineal $b(x) = \kappa(\theta - x)$. Cuando el estado del proceso supera el valor de equilibrio ($X(t) > \theta$), la deriva es negativa y dirige la trayectoria hacia abajo; Si el proceso se encuentra por debajo del nivel de referencia ($X(t) < \theta$), la deriva es positiva e impulsa un crecimiento hacia θ. Esta propiedad de reversión a la media convierte a este proceso en el modelo base para describir la evolución térmica de sistemas regidos por la ley de enfriamiento de Newton.

Aplicando el Lema de Itô (Teorema 4.4) a la función $f(t, x) = xe^{\kappa t}$, se obtiene que $d(X(t)e^{\kappa t}) = \kappa\theta e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}dW(t)$. Integrando en el intervalo $[0, t]$ y despejando $X(t)$, se obtiene la solución analítica explícita del proceso:

$$X(t) = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW(s). \tag{4.5.4}$$

Dado que el integrando $e^{-\kappa(t-s)}$ es una función determinista, la integral de Itô en la Ecuación 4.5.4 es una variable aleatoria normal centrada. Asumiendo una condición inicial determinista x_0, el valor esperado y la varianza del proceso (calculada mediante la Isometría de Itô, Teorema 4.1) están dadas por:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t}, \qquad \mathrm{Var}(X(t)) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right). \tag{4.5.5}$$

Con lo cual, para todo instante $t > 0$, la variable aleatoria $X(t)$ sigue una distribución normal:

$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\theta + (x_0 - \theta)e^{-\kappa t}, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right)\right), \tag{4.5.6}$$

la cual converge cuando $t \to \infty$ a una distribución normal $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$ independientemente del estado inicial x_0 (Karlin y Taylor 1998).

4.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas con Saltos

Los modelos de difusión continua basados únicamente en el movimiento Browniano resultan insuficientes cuando el sistema físico experimenta perturbaciones discretas e instantáneas. Al incorporar la medida aleatoria de Poisson compensada $\tilde{N}(dt, dz)$ Definición 4.15 dentro de la EDE, se obtiene una ecuación diferencial estocástica con saltos (Situ 2005).

Definición 4.21 (Ecuación Diferencial Estocástica con Saltos de Poisson)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Sean $W(t)$ un movimiento Browniano estándar y $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu_t(dz)dt$ una medida aleatoria de Poisson compensada sobre $[0, \infty) \times \mathcal{Z}$, ambos adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y mutuamente independientes. Una ecuación diferencial estocástica con saltos en el intervalo $[t_0, T]$ (con $0 \leq t_0 < T < \infty$) es una relación simbólica de la forma:

$$dX(t) = b(t, X(t^-))dt + \sigma(t, X(t^-))dW(t) + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(t, X(t^-), z)\tilde{N}(dt, dz), \quad X(t_0) = x_0, \tag{4.6.1}$$

donde $b : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de deriva compensada, $\sigma : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión continua y $\gamma : [t_0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ cuantifica la amplitud de los saltos.

Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y con trayectorias càdlàg es una **solución fuerte** de la Ecuación 4.6.1 si sus coeficientes evaluados a lo largo de la trayectoria son integrables casi seguramente y si para todo $t \in [t_0, T]$ se satisface con probabilidad 1 la ecuación integral equivalente:

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s^-))ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s^-))dW(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathcal{Z}} \gamma(s, X(s^-), z)\tilde{N}(ds, dz). \tag{4.6.2}$$

En la Ecuación 4.6.1 y la Ecuación 4.6.2, el integrando se evalúa en el límite por la izquierda $X(t^-) = \lim_{s\uparrow t} X(s)$ para asegurar que sea un proceso predecible (Definición 4.16) y que la integral respecto a la medida compensada $\tilde{N}(dt, dz)$ preserve la propiedad de martingala (Situ 2005). Cabe notar que en las integrales respecto a ds y $dW(s)$ es indistinto escribir $X(s)$ o $X(s^-)$, dado que toda trayectoria càdlàg posee a lo sumo un número numerable de discontinuidades, el cual es un conjunto con medida de Lebesgue cero.

Para ver la diferencia entre una EDE continua y una EDE con saltos, en la Figura 4.3 se muestran dos trayectorias simuladas de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck Definición 4.20
.

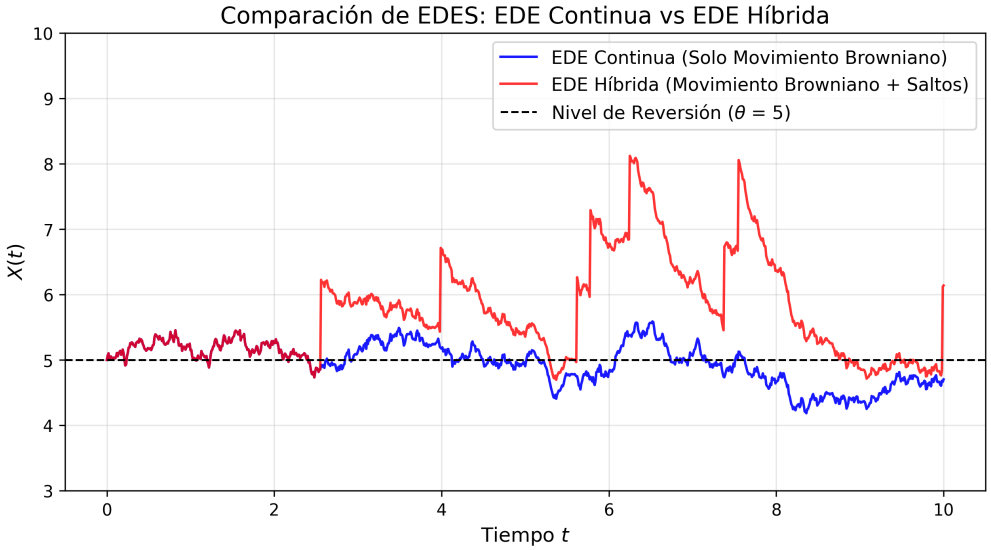


Figura 4.3.: Trayectorias simuladas de una ecuación diferencial estocástica de tipo Ornstein-Uhlenbeck con y sin saltos. El eje horizontal representa el avance del tiempo en un horizonte de $T = 10.0$ con incrementos discretos de $dt = 0.01$. La línea horizontal negra punteada indica el nivel de equilibrio $\theta = 5$. La trayectoria continua (azul) muestra una difusión clásica perturbada únicamente por el movimiento Browniano $dW(t)$. Por otro lado, la trayectoria discontinua (roja) incorpora perturbaciones discretas mediante un proceso de saltos de Poisson, generando incrementos instantáneos seguidos por etapas de decaimiento exponencial controladas por la tasa de reversión κ.

Como se observa en la Figura 4.3, la presencia de discontinuidades modifica el comportamiento de las trayectorias del proceso. Debido a que estos saltos ocurren de forma instantánea ($\Delta X(t) = X(t) - X(t^-) \neq 0$), el Lema de Itô continuo (Teorema 4.4) debe extenderse incorporando un operador de diferencias finitas que contabilice el cambio exacto de cualquier función diferenciable en los instantes de discontinuidad (Situ 2005; Platen y Bruti-Liberati 2010).

Teorema 4.5 (Fórmula de Itô para Difusiones con Saltos)**.** *Sea $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ una solución de la EDE con saltos (Ecuación 4.6.1) cuya medida de conteo $N(dt,dz)$ posee medida de intensidad $\nu_t(dz)dt = \lambda(t)dF(z)dt$. Sea $f(t,x)$ una función real continuamente diferenciable respecto a t ($\mathcal{C}^1$) y dos veces continuamente diferenciable respecto a x ($\mathcal{C}^2$). Entonces el proceso compuesto $f(t,X(t))$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica con saltos:*

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) = &\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t)) + b(t,X(t))\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,X(t))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\right]dt \\ &+ \int_{\mathcal{Z}}\left[f(t,X(t^-)+\gamma(t,X(t^-),z)) - f(t,X(t^-)) - \gamma(t,X(t^-),z)\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t^-))\right]\nu_t(dz)dt \\ &+ \sigma(t,X(t^-))\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t^-))dW(t) \\ &+ \int_{\mathcal{Z}}\left[f(t,X(t^-)+\gamma(t,X(t^-),z)) - f(t,X(t^-))\right]\tilde{N}(dt,dz). \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Las condiciones suficientes para garantizar que la Ecuación 4.6.1 posea una solución fuerte única y acotada en media cuadrática fueron establecidas por R. Situ mediante el método de contracción en espacios de Banach y estimaciones a priori (Situ 2005).

Teorema 4.6 (Teorema de Existencia y Unicidad con Saltos de Poisson (Teorema 117 y Lema 114 de Situ))**.** *Consideremos la ecuación diferencial estocástica con saltos (Ecuación 4.6.1) en el intervalo $[t_0,T]$, con condición inicial $X(t_0) = x_0$ medible respecto a $\mathcal{F}_{t_0}$ tal que $\mathbb{E}[|x_0|^2] < \infty$. Supóngase que existen constantes positivas $L, K > 0$ tales que para todo $t \in [t_0,T]$ y cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, los coeficientes satisfacen:*

1. ***Condición de Lipschitz Global:***

$$|b(t,x)-b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2 + \int_{\mathcal{Z}}|\gamma(t,x,z)-\gamma(t,y,z)|^2\nu_t(dz) \leq L|x-y|^2.$$

2. ***Condición de Crecimiento Lineal:***

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 + \int_{\mathcal{Z}}|\gamma(t,x,z)|^2\nu_t(dz) \leq K(1+|x|^2).$$

Entonces existe una única solución fuerte $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ *adaptada a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}$ *con trayectorias càdlàg casi seguramente. Además, la solución satisface la cota de segundo momento:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right] \leq C\left(1+\mathbb{E}[|x_0|^2]\right) < \infty,$$

donde $C > 0$ *es una constante que depende únicamente de* K *y de la longitud del intervalo* $(T - t_0)$ *(Situ 2005).*

Una propiedad fundamental derivada de la estructura de martingala y de la propiedad de Markov fuerte tanto del movimiento Browniano como de las medidas aleatorias de Poisson (Teoremas 100 y 101 en (Situ 2005); Observación 3.10 en (Mao y Yuan 2006)) establece que en el Teorema 4.6 los extremos temporales t_0 y T pueden sustituirse por tiempos de paro acotados τ_a y τ_b tales que $0 \leq \tau_a \leq \tau_b \leq T$ casi seguramente, siempre que la condición inicial $X(\tau_a)$ sea $\mathcal{F}_{\tau_a}$-medible. Esta propiedad permitirá resolver ecuaciones diferenciales estocásticas con cambios de régimen, tramo a tramo sobre intervalos acotados.

4.7. Herramientas Analíticas Auxiliares

Para demostrar la existencia, unicidad y acotamiento en segundo momento de las ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas, así como para verificar analíticamente los coeficientes de nuestro modelo termodinámico, requerimos de tres desigualdades clásicas del análisis matemático y de los procesos estocásticos (Mao y Yuan 2006; Situ 2005).

Lema 4.2 (Desigualdad Elemental de Sumas Finitas)**.** *Para cualquier entero* $k \geq 1$*, cualesquiera números reales* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ *y todo exponente* $p \geq 1$*, una aplicación directa de la desigualdad discreta de Hölder y la convexidad de la función* $x \mapsto |x|^p$ *implica la cota:*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|^p \leq k^{p-1}\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p.$$

En particular, para el análisis en media cuadrática $(p = 2)$*, utilizaremos esta desigualdad para* $k = 2$ *y* $k = 4$*:*

$$|a \pm b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2, \qquad |a+b+c+d|^2 \leq 4\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right).$$

Al acotar el supremo de una solución, no es posible intercambiar directamente el operador de valor esperado con el supremo dentro de las integrales. Para controlar dichos términos mediante sus momentos en el tiempo final y usar posteriormente las isometrías de Itô, se emplea la desigualdad maximal de Doob (Mao y Yuan 2006; Situ 2005).

Teorema 4.7 (Desigualdad Maximal de Martingalas de Doob). *Sea $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ una martingala Definición 4.6 con trayectorias càdlàg respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, y sea $[a,b] \subset [0,\infty)$ un intervalo cerrado y acotado. Si $p > 1$ y $\mathbb{E}[|M(b)|^p] < \infty$, entonces se cumple que:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\leq t\leq b} |M(t)|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M(b)|^p\right].$$

En particular, para martingalas de cuadrado integrable ($p = 2$), la constante óptima es $\left(\frac{2}{2-1}\right)^2 = 4$, por lo que para toda función integrable $g \in \mathcal{L}^2([a,b];\mathbb{R})$ e integrando predecible H, combinando esta desigualdad con las isometrías de Itô (Teorema 4.1 y Teorema 4.2), se obtienen las cotas:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t g(s)dW(s)\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_a^b |g(s)|^2 ds\right],$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t \int_{\mathcal{Z}} H(s,z)\tilde{N}(ds,dz)\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_a^b \int_{\mathcal{Z}} |H(s,z)|^2 \nu_s(dz)ds\right].$$

Finalmente, para despejar la función de estado esperada cuando esta aparece en ambos lados de una desigualdad integral, se recurre a la desigualdad de Grönwall (Mao y Yuan 2006).

Lema 4.3 (Desigualdad de Grönwall). *Sea $T > t_0 \geq 0$ y sea $u : [t_0, T] \to [0,\infty)$ una función medible de Borel, acotada y no negativa, y sea $v : [t_0, T] \to [0,\infty)$ una función integrable no negativa. Si existe una constante $C \geq 0$ tal que para todo $t \in [t_0, T]$ se satisface la desigualdad integral:*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds,$$

entonces, para todo $t \in [t_0, T]$, la función $u(t)$ cumple la cota exponencial:

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right).$$

4.8. Sistemas Estocásticos Híbridos: Discontinuidades y Cambios de Régimen de Markov

Cuando los parámetros estructurales de un sistema físico cambian drásticamente debido a transiciones en el entorno (como cortes y restablecimientos en el suministro eléctrico) y simultáneamente el estado continuo sufre perturbaciones impulsivas (como aperturas de puerta), el comportamiento conjunto se describe mediante una ecuación diferencial

estocástica híbrida con cambios de régimen de Markov y saltos (Mao y Yuan 2006; Yin y Zhu 2010).

Para formalizar el análisis sobre subintervalos cuyos extremos son tiempos de paro Definición 4.5 τ y ρ tales que $0 \leq \tau(\omega) \leq \rho(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, usamos la notación estándar de **intervalos estocásticos** de (Mao y Yuan 2006):

$$[[\tau, \rho]] = \{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : \tau(\omega) \leq t \leq \rho(\omega)\}, \qquad [[\tau, \rho[[= \{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : \tau(\omega) \leq t < \rho(\omega)\}.$$

Asimismo, denotamos por $\mathcal{M}^2([[\tau, \rho]]; \mathbb{R})$ al espacio de los procesos estocásticos real-valuados $\{X(t)\}$ adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y definidos en $[[\tau, \rho]]$ tales que $\mathbb{E}\left[\int_\tau^\rho |X(t)|^2 dt\right] < \infty$, y por $L^2_{\mathcal{F}_\tau}(\Omega; \mathbb{R})$ a la familia de variables aleatorias ξ que son $\mathcal{F}_\tau$-medibles y satisfacen que $\mathbb{E}[|\xi|^2] < \infty$ (Mao y Yuan 2006).

Definición 4.22 (Ecuación Diferencial Estocástica Híbrida con Saltos)**.** Sea $\{\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ una cadena de Markov a tiempo continuo Definición 4.11 con trayectorias càdlàg Definición 4.4, adaptada a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, que toma valores en un espacio de estados finito $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, m\}$ con matriz generadora $Q = (q_{ij})_{m \times m}$. Sean $W(t)$ un movimiento Browniano estándar y $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu_t(dz)dt$ una medida aleatoria de Poisson compensada sobre $[0, \infty) \times \mathcal{Z}$. Una **ecuación diferencial estocástica híbrida con saltos** en el intervalo $[t_0, T]$ se expresa en su forma diferencial como:

$$dX(t) = b(t, X(t^-), \alpha(t^-))dt + \sigma(t, X(t^-), \alpha(t^-))dW(t) + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(t, X(t^-), \alpha(t^-), z)\tilde{N}(dt, dz), \tag{4.8.1}$$

con condiciones iniciales $X(t_0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega; \mathbb{R})$ y $\alpha(t_0) = \alpha_0$, donde α_0 es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$-medible con valores en $\mathcal{M}$, y las funciones de coeficientes están definidas por $b : [t_0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $\sigma : [t_0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ y $\gamma : [t_0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{M} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$.

Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in [t_0, T]}$ se denomina una **solución fuerte** de la Ecuación 4.8.1 en $[t_0, T]$ si cumple las siguientes propiedades (Mao y Yuan 2006; Situ 2005):

1. $\{X(t)\}_{t \in [t_0, T]}$ es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y posee trayectorias càdlàg casi seguramente.
2. Los coeficientes evaluados cumplen $\{b(t, X(t^-), \alpha(t^-))\} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R})$, $\{\sigma(t, X(t^-), \alpha(t^-))\} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R})$ y $\int_{t_0}^T \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(t, X(t^-), \alpha(t^-), z)|^2 \nu_t(dz)dt < \infty$ casi seguramente.
3. Para todo $t \in [t_0, T]$, se satisface con probabilidad 1 la ecuación integral:

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, X(s^-), \alpha(s^-))ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X(s^-), \alpha(s^-))dW(s) + \int_{t_0}^t \int_{\mathcal{Z}} \gamma(s, X(s^-), \alpha(s^-), z)\tilde{N}(ds, dz) \tag{4.8.2}$$

Se dice que la solución $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ es **única** (en el sentido de unicidad trayectoria por trayectoria) si para cualquier otra solución $\{\widehat{X}(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ ambos procesos son indistinguibles, es decir, $\mathbb{P}\{X(t) = \widehat{X}(t) \text{ para todo } t \in [t_0, T]\} = 1$.

Para operar con funciones que dependen conjuntamente de la variable de estado $X(t)$ y del estado discreto de la cadena de Markov $\alpha(t)$, la Fórmula de Itô con saltos (Teorema 4.5) se acopla con el generador infinitesimal de la cadena $Q = (q_{ij})$ (Mao y Yuan 2006; Yin y Zhu 2010).

Teorema 4.8 (Fórmula de Itô Generalizada para Sistemas Híbridos con Saltos)**.** *Sea $\{f(t,x,i)\}_{i\in\mathcal{M}}$ una familia de funciones reales definidas en $[t_0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ tales que, para cada estado $i\in\mathcal{M}$, $f(\cdot,\cdot,i)$ es continuamente diferenciable respecto a t ($\mathcal{C}^1$) y dos veces continuamente diferenciable respecto a x ($\mathcal{C}^2$). Si $(X(t),\alpha(t))$ es un proceso conjunto que satisface la Ecuación 4.8.1, entonces el proceso compuesto $f(t,X(t),\alpha(t))$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica híbrida con saltos:*

$$\begin{aligned} df(t,X(t),\alpha(t)) = \mathcal{L}f(t,X(t),\alpha(t))dt + \sigma(t,X(t^-),\alpha(t^-))\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t^-),\alpha(t^-))dW(t) \\ + \int_{\mathcal{Z}} \left[f(t,X(t^-)+\gamma(t,X(t^-),\alpha(t^-),z),\alpha(t^-)) - f(t,X(t^-),\alpha(t^-))\right]\tilde{N}(dt,dz) + dM_\alpha(t), \end{aligned}$$

donde $M_\alpha(t)$ es una martingala de salto asociada a las transiciones de $\alpha(t)$ y el operador generador acoplado $\mathcal{L}f : [t_0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(t,x,i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x,i) + b(t,x,i)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,i) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,i)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x,i) + \sum_{j=1}^{m} q_{ij}f(t,x,j) \\ + \int_{\mathcal{Z}} \left[f(t,x+\gamma(t,x,i,z),i) - f(t,x,i) - \gamma(t,x,i,z)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,i)\right]\nu_t(dz). \end{aligned}$$

4.8.1. Teorema de Existencia y Unicidad para Sistemas Híbridos

A continuación enunciamos y demostramos a detalle el teorema central que garantiza la existencia, unicidad fuerte y acotamiento en segundo momento de la solución para la ecuación diferencial estocástica híbrida con saltos (Ecuación 4.8.1). La estructura de la demostración extiende el procedimiento constructivo sobre tiempos de paro del Teorema 3.13 y Lema 3.1 de (Mao y Yuan 2006) al caso de difusiones impulsadas por medidas aleatorias de Poisson compensadas mediante el Teorema 4.6.

Teorema 4.9 (Teorema de Existencia y Unicidad para EDES Híbridas con Cambios de Régimen de Markov y Saltos de Poisson)**.** *Consideremos la ecuación diferencial estocástica híbrida (Ecuación 4.8.1) en el intervalo $[t_0,T]$ ($0\le t_0<T<\infty$), con condiciones iniciales*

$X(t_0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}(\Omega;\mathbb{R})$ *y* $\alpha(t_0) = \alpha_0$. *Supóngase que el movimiento Browniano* $W(t)$, *la medida aleatoria de Poisson* $N(dt,dz)$ *(con medida de intensidad* $\nu_t(dz)dt = \lambda(t)dF(z)dt$, *donde* $\int_{t_0}^{T} \lambda(t)dt < \infty$*) y la cadena de Markov a tiempo continuo* $\alpha(t)$ *(con espacio de estados finito* $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ *y matriz generadora de tasas finitas* $Q = (q_{ij})_{m\times m}$*) son mutuamente independientes.*

Si existen constantes positivas $L, K > 0$ *tales que los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica híbrida satisfacen las siguientes condiciones:*

1. ***Condición de Lipschitz Global:*** *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, T]$ *y cada régimen* $i \in \mathcal{M}$,

$$|b(t,x,i) - b(t,y,i)|^2 + |\sigma(t,x,i) - \sigma(t,y,i)|^2 + \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(t,x,i,z) - \gamma(t,y,i,z)|^2 \nu_t(dz) \leq L|x-y|^2. \tag{4.8.3}$$

2. ***Condición de Crecimiento Lineal:*** *Para todo* $(t,x,i) \in [t_0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{M}$,

$$|b(t,x,i)|^2 + |\sigma(t,x,i)|^2 + \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(t,x,i,z)|^2 \nu_t(dz) \leq K(1+|x|^2). \tag{4.8.4}$$

Entonces existe una única solución fuerte càdlàg $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ *de la Ecuación 4.8.1 en* $[t_0,T]$ *y, además, la solución satisface la cota de segundo momento:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leq t\leq T} |X(t)|^2\right] \leq (1 + 4\mathbb{E}[|x_0|^2])\, e^{4K(T-t_0)(T-t_0+5)} < \infty, \tag{4.8.5}$$

por lo que $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ *pertenece al espacio* $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$.

Demostración:

Dado que la cadena de Markov a tiempo continuo $\{\alpha(t)\}_{t\geq t_0}$ toma valores en un espacio de estados finito $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ y sus tasas de transición satisfacen $0 \leq q_{ij} < \infty$ para todo $i \neq j$, todos los estados de la cadena son estables $\left(|q_{ii}| = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty\right)$ y el proceso no presenta explosión (Mao y Yuan 2006). En consecuencia, casi toda trayectoria de $\alpha(\cdot)$ es una función escalonada continua por la derecha que experimenta únicamente un número finito de cambios en el intervalo $[t_0, T]$. Asi, definiendo recursivamente la sucesión de tiempos de paro $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ asociada a las conmutaciones de régimen mediante $\tau_0 = t_0$ y

$$\tau_{k+1} = \min\{T, \inf\{t > \tau_k : \alpha(t) \neq \alpha(\tau_k)\}\}, \quad k \geq 0,$$

se cumplen las siguientes dos propiedades:

- Para casi todo $\omega \in \Omega$, existe un índice entero finito $\bar{k} = \bar{k}(\omega) < \infty$ tal que $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{\bar{k}} = T$ y $\tau_k = T$ para todo $k > \bar{k}$.
- El proceso $\alpha(\cdot)$ permanece constante (como una variable aleatoria fija) sobre cada intervalo estocástico semiabierto $[[\tau_k, \tau_{k+1}[[$, es decir:

$$\alpha(t) = \alpha(\tau_k) \quad \text{para todo } \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \ \forall k \geq 0.$$

Consideremos ahora la Ecuación 4.8.1 restringida al primer intervalo estocástico, i.e. $t \in [[\tau_0, \tau_1]]$. Dado que para $t \in [[\tau_0, \tau_1[[$ se tiene que $\alpha(t^-) = \alpha(t_0) = \alpha_0$, y que el conjunto puntual $\{t = \tau_1\}$ tiene medida de Lebesgue cero y probabilidad nula de coincidir simultáneamente con un salto de la medida independiente $N(dt, dz)$, la ecuación híbrida en $t \in [[\tau_0, \tau_1]]$ se reduce a la ecuación diferencial estocástica con régimen fijo:

$$dX(t) = b(t, X(t^-), \alpha_0)dt + \sigma(t, X(t^-), \alpha_0)dW(t) + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(t, X(t^-), \alpha_0, z)\tilde{N}(dt, dz), \tag{4.8.6}$$

con condiciones iniciales x_0 y α_0 en $t = \tau_0$. De acuerdo a las condiciones (Ecuación 4.8.3) y (Ecuación 4.8.4), los coeficientes de la Ecuación 4.8.6 satisfacen las hipótesis del Teorema 4.6. Aplicando dicho teorema junto con la propiedad de localización en tiempos de paro, se concluye que la Ecuación 4.8.6 posee una única solución fuerte càdlàg $\{X^{(0)}(t)\}$ en $[[\tau_0, \tau_1]]$, la cual pertenece al espacio $\mathcal{M}^2([[\tau_0, \tau_1]]; \mathbb{R})$. En particular, se tiene que $X(\tau_1) := X^{(0)}(\tau_1) \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau_1}}(\Omega; \mathbb{R})$.

Consideremos ahora la Ecuación 4.8.1 sobre el segundo intervalo estocástico $t \in [[\tau_1, \tau_2]]$. En este subintervalo el régimen permanece fijo en $\alpha(\tau_1)$, por lo que la ecuación tiene la siguiente forma:

$$dX(t) = b(t, X(t^-), \alpha(\tau_1))dt + \sigma(t, X(t^-), \alpha(\tau_1))dW(t) + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(t, X(t^-), \alpha(\tau_1), z)\tilde{N}(dt, dz), \tag{4.8.7}$$

con condiciones iniciales $X(\tau_1) \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau_1}}(\Omega; \mathbb{R})$ y $\alpha(\tau_1)$ en el tiempo de paro $t = \tau_1$. Por la independencia mutua de W, N y α, y por la propiedad de Markov fuerte del movimiento Browniano y de la medida aleatoria de Poisson respecto a tiempos de paro, los incrementos de los procesos conductores posteriores a τ_1 son independientes de $\mathcal{F}_{\tau_1}$. Nuevamente, por el Teorema 4.6, la Ecuación 4.8.7 posee una única solución fuerte càdlàg $\{X^{(1)}(t)\}$ que pertenece a $\mathcal{M}^2([[\tau_1, \tau_2]]; \mathbb{R})$ y satisface que $X(\tau_2) := X^{(1)}(\tau_2) \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau_2}}(\Omega; \mathbb{R})$.

Repitiendo este procedimiento por inducción sobre cada subintervalo estocástico $[[\tau_k, \tau_{k+1}]]$ con condiciones iniciales $X(\tau_k) \in L^2_{\mathcal{F}_{\tau_k}}(\Omega; \mathbb{R})$ y $\alpha(\tau_k)$ en el tiempo de paro $t = \tau_k$, se obtiene una única solución fuerte local $\{X^{(k)}(t)\} \in \mathcal{M}^2([[\tau_k, \tau_{k+1}]]; \mathbb{R})$ para cada $k \geq 0$. Dado que las soluciones consecutivas coinciden en los tiempos de empalme $(X^{(k)}(\tau_k) = X^{(k-1)}(\tau_k))$ y que para casi todo $\omega \in \Omega$ existe un número finito $\bar{k}(\omega)$ de cambios de régimen hasta alcanzar T $(\tau_{\bar{k}} = T)$, el proceso global definido en $[t_0, T]$ mediante:

$$X(t) = X^{(0)}(t)\mathbf{1}_{[[\tau_0, \tau_1[[}(t) + \sum_{k=1}^{\bar{k}-1} X^{(k)}(t)\mathbf{1}_{[[\tau_k, \tau_{k+1}[[}(t) + X^{(\bar{k}-1)}(T)\mathbf{1}_{\{T\}}(t)$$

posee trayectorias càdlàg, es $\mathcal{F}_t$-adaptado y satisface la ecuación integral (Ecuación 4.8.2) en todo $[t_0, T]$ con probabilidad 1. Asimismo, si $\{\widehat{X}(t)\}_{t\in[t_0,T]}$ es otra solución con las mismas condiciones iniciales, por la unicidad del Teorema 4.6 en $[[\tau_0, \tau_1]]$ se cumple que $\mathbb{P}\{X(t) = \widehat{X}(t) \text{ para todo } t \in [[\tau_0, \tau_1]]\} = 1$; en particular, $X(\tau_1) = \widehat{X}(\tau_1)$ casi seguramente, lo cual implica por inducción sobre los $\bar{k}(\omega)$ subintervalos que $\mathbb{P}\{X(t) = \widehat{X}(t) \text{ para todo } t \in [t_0, T]\} = 1$, demostrando la existencia y unicidad de la solución en $[t_0, T]$.

Resta demostrar que la solución única $X(t)$ satisface la estimación de segundo momento (Ecuación 4.8.5). Para todo entero $n \geq 1$, definamos el tiempo de paro de truncamiento:

$$\sigma_n = \text{mín}\left\{T, \text{ínf}\{t \in [t_0, T] : |X(t)| \geq n\}\right\}.$$

Claramente, σ_n es no decreciente y $\sigma_n \uparrow T$ casi seguramente cuando $n \to \infty$. Definiendo el proceso detenido $X_n(t) = X(\text{mín}\{t, \sigma_n\})$ para $t \in [t_0, T]$, por las propiedades de las integrales estocásticas en tiempos de paro se cumple que:

$$\begin{aligned} X_n(t) = x_0 &+ \int_{t_0}^{t} b(s, X_n(s^-), \alpha(s^-))\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(s)ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X_n(s^-), \alpha(s^-))\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(s)dW(s) \\ &+ \int_{t_0}^{t}\int_{\mathcal{Z}} \gamma(s, X_n(s^-), \alpha(s^-), z)\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(s)\tilde{N}(ds, dz). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad del (Lema 4.2) para $k = 4$ y $p = 2$, junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la integral respecto al tiempo $\left|\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right|^2 \leq (t - t_0)\int_{t_0}^{t} |g(s)|^2 ds$, se obtiene para todo $s \in [t_0, t]$ que:

$$\begin{aligned} |X_n(s)|^2 \leq 4|x_0|^2 &+ 4(s - t_0)\int_{t_0}^{s} |b(r, X_n(r^-), \alpha(r^-))|^2\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dr \\ &+ 4\left|\int_{t_0}^{s} \sigma(r, X_n(r^-), \alpha(r^-))\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dW(r)\right|^2 \\ &+ 4\left|\int_{t_0}^{s}\int_{\mathcal{Z}} \gamma(r, X_n(r^-), \alpha(r^-), z)\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)\tilde{N}(dr, dz)\right|^2. \end{aligned}$$

Tomando el supremo para $s \in [t_0, t]$, aplicando el valor esperado en ambos miembros y utilizando la Desigualdad Maximal de Doob junto con las isometrías de Itô (Teorema 4.7) en las dos integrales de martingala, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t_0\leq s\leq t} |X_n(s)|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[|x_0|^2] &+ 4(T - t_0)\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |b(r, X_n(r^-), \alpha(r^-))|^2\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dr\right] \\ &+ 16\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} |\sigma(r, X_n(r^-), \alpha(r^-))|^2\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dr\right] \\ &+ 16\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathcal{Z}} |\gamma(r, X_n(r^-), \alpha(r^-), z)|^2\nu_r(dz)\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dr\right]. \end{aligned}$$

Mayorando el factor $(T-t_0)$ y los coeficientes 16 mediante el factor común $4(T-t_0+5)$ (dado que $4{\cdot}4 < 4(T-t_0+5)$), y usando la condición de crecimiento lineal (Ecuación 4.8.4), agrupamos las tres integrales en una sola cota:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le s\le t}|X_n(s)|^2\right] \le 4\mathbb{E}[|x_0|^2] + 4(T-t_0+5)\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t} K\left(1+|X_n(r^-)|^2\right)\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r)dr\right], \tag{4.8.8}$$

dado que $|X_n(r^-)|^2\mathbf{1}_{[[t_0,\sigma_n]]}(r) \le \sup_{t_0\le u\le r}|X_n(u)|^2$, y aplicando el Teorema de Tonelli se tiene que:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le s\le t}|X_n(s)|^2\right] \le 4\mathbb{E}[|x_0|^2] + 4K(T-t_0+5)\int_{t_0}^{t}\left(1+\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le u\le r}|X_n(u)|^2\right]\right)dr. \tag{4.8.9}$$

Note que, aunque el proceso detenido $X_n(s)$ puede superar el umbral n en el instante exacto $s=\sigma_n$ debido a la ocurrencia de un salto, por definición de σ_n se cumple que $|X(r)|<n$ para todo $r\in(t_0,\sigma_n)$, por lo que el límite por la izquierda satisface que $|X_n(r^-)| = |X(r^-)| \le \max\{n,|x_0|\}$ para todo $r\in[[t_0,\sigma_n]]$ (Situ 2005). Elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad y utilizando que el máximo de dos números no negativos es menor o igual que su suma, se obtiene que $|X_n(r^-)|^2 \le \max\{n^2,|x_0|^2\} \le n^2+|x_0|^2$. Sustituyendo esta cota en el integrando de la Ecuación 4.8.8 e integrando respecto a r, se tiene que para todo $t\in[t_0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le s\le t}|X_n(s)|^2\right] \le 4\mathbb{E}[|x_0|^2] + 4K(T-t_0+5)(T-t_0)\left(1+n^2+\mathbb{E}[|x_0|^2]\right) < \infty.$$

Esto garantiza que la función $u_n(t) = 1+\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le s\le t}|X_n(s)|^2\right]$ es finita, acotada y medible en $[t_0,T]$. Sumando 1 en ambos lados de la Ecuación 4.8.9, obtenemos para todo $t\in[t_0,T]$:

$$1+\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le s\le t}|X_n(s)|^2\right] \le 1+4\mathbb{E}[|x_0|^2]+4K(T-t_0+5)\int_{t_0}^{t}\left(1+\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le u\le r}|X_n(u)|^2\right]\right)dr.$$

Aplicando la Desigualdad de Grönwall (Lema 4.3) y evaluando en $t=T$, se obtiene que:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le t\le \sigma_n}|X(t)|^2\right] \le 1+\mathbb{E}\left[\sup_{t_0\le t\le T}|X_n(t)|^2\right] \le \left(1+4\mathbb{E}[|x_0|^2]\right)e^{4K(T-t_0)(T-t_0+5)}.$$

Finalmente, tomando el límite cuando $n \to \infty$, dado que $\sigma_n \uparrow T$ casi seguramente, por el Teorema de la Convergencia Monótona se obtiene la desigualdad deseada (Ecuación 4.8.5), por lo que $\{X(t)\}_{t\in[t_0,T]} \in \mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R})$.

De todo lo anterior se concluye la demostracion del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas con saltos y régimen de Markov (Teorema 4.9). ⊠

4.9. Modelo Estocástico Termodinámico (Ornstein-Uhlenbeck Híbrido)

Una vez demostrado el teorema general de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas con saltos y régimen de Markov (Teorema 4.9), procedemos a formular la ecuación diferencial estocástica híbrida que describe la evolución de la temperatura interna $T(t)$ del refrigerador en un periodo temporal $[0,T]$, con $T>0$ (la justificación detallada de la elección de esta ecuación diferencial estocástica se encuentra en el capitulo 7: Estudio de Caso).

Sea $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Basándonos en la ley de enfriamiento de Newton y en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Definición 4.20), modelamos la temperatura interna $T(t)$ mediante una ecuación diferencial estocástica híbrida controlada por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ (Definición 4.11) con espacio de estados $\mathcal{M}=\{1,2\}$ y matriz generadora de tasas finitas $Q=(q_{ij})_{2\times 2}$, cuya expresión está dada por:

$$dT(t) = \begin{cases} \kappa_{on}(\theta_{set}-T(t))dt + \sigma_{on}dW(t) + dJ(t) & \text{si } \alpha(t)=1 \text{ (Con energía)} \\ \kappa_{off}(T_{amb}(t)-T(t))dt + \sigma_{off}dW(t) & \text{si } \alpha(t)=2 \text{ (Corte de luz)} \end{cases}, \quad 0\leq t\leq T, \tag{4.9.1}$$

con condiciones iniciales $T(0)=T_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\mathbb{R})$ y $\alpha(0)=\alpha_0 \in \mathcal{M}$. En la Ecuación 4.9.1, $\kappa_{on}>0$ y $\kappa_{off}>0$ representan las tasas de transferencia térmica en cada régimen, $\theta_{set}\in\mathbb{R}$ denota la temperatura de equilibrio del termostato, $\sigma_{on}>0$ y $\sigma_{off}>0$ son los coeficientes de difusión constantes asociados al movimiento Browniano estándar $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, y $T_{amb}:[0,T]\to\mathbb{R}$ es una función determinista continua y acotada que representa la temperatura ambiente exterior.

Las perturbaciones discretas por apertura de puertas en el régimen $\alpha(t)=1$ están dadas por un proceso de Poisson compuesto (Definición 4.10):

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N_{puerta}(t)} \gamma_i,$$

donde $\{N_{puerta}(t)\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo (Definición 4.9) con función de intensidad localmente integrable y acotada $\lambda(t) \geq 0$, y $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada $F(z)$ con soporte $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}$, tales que poseen segundo momento finito $\mathbb{E}[|\gamma_i|^2] = M_\gamma < \infty$ (y por ende media finita $\mathbb{E}[|\gamma_i|] < \infty$). Se asume que el movimiento Browniano $W(t)$, el proceso de conteo $N_{puerta}(t)$, las magnitudes $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y la cadena de Markov $\alpha(t)$ son mutuamente independientes.

Definiendo los coeficientes de deriva $b : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ y de difusión $\sigma : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ para cada régimen mediante:

$$b(t,T,1) = \kappa_{on}(\theta_{set} - T), \qquad \sigma(1) = \sigma_{on}, \tag{4.9.2}$$

$$b(t,T,2) = \kappa_{off}(T_{amb}(t) - T), \qquad \sigma(2) = \sigma_{off}, \tag{4.9.3}$$

y la función de amplitud de salto $\gamma : \mathcal{M} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ como:

$$\gamma(1,z) = z, \qquad \gamma(2,z) = 0, \tag{4.9.4}$$

la Ecuación 4.9.1 se puede escribir de forma unificada evaluada en los límites por la izquierda como:

$$dT(t) = b(t, T(t^-), \alpha(t^-))dt + \sigma(\alpha(t^-))dW(t) + \mathbf{1}_{\{\alpha(t^-)=1\}}dJ(t). \tag{4.9.5}$$

4.9.1. Transformación Analítica a la Forma Compensada

Para analizar la existencia y unicidad de la solución de la Ecuación 4.9.5 mediante el Teorema 4.9, es necesario expresar el diferencial del proceso de Poisson compuesto $dJ(t)$ en términos de una integral estocástica respecto a la medida aleatoria de Poisson compensada $\tilde{N}(dt,dz)$ (Definición 4.15).

Sea $N(dt,dz)$ la medida aleatoria de conteo de Poisson asociada al proceso compuesto $J(t)$, cuya medida de intensidad (Definición 4.14) está dada por $\nu_t(dz)dt = \lambda(t)dF(z)dt$. Aplicando el Lema 4.1 y utilizando la definición de $\gamma(\alpha,z)$, el término de salto en la Ecuación 4.9.5 admite la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{\alpha(t^-)=1\}}dJ(t) &= \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\alpha(t^-),z)N(dt,dz) \\ &= \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\alpha(t^-),z)\tilde{N}(dt,dz) + \left(\lambda(t)\int_{\mathcal{Z}} \gamma(\alpha(t^-),z)dF(z)\right)dt.\end{aligned}$$

Cuando $\alpha(t^-) = 1$, la integral respecto a $dF(z)$ coincide con el valor esperado de las magnitudes de salto, i.e. $\int_{\mathcal{Z}} z dF(z) = \mathbb{E}[\gamma_i]$, mientras que cuando $\alpha(t^-) = 2$ dicha integral se anula debido a que $\gamma(2, z) = 0$. Juntando este término determinista dentro del coeficiente de deriva original $b(t, T, \alpha)$, definimos el coeficiente de **deriva compensada** $\tilde{b} : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ como:

$$\tilde{b}(t, T, 1) = \kappa_{on}(\theta_{set} - T) + \lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i], \tag{4.9.6}$$

$$\tilde{b}(t, T, 2) = \kappa_{off}(T_{amb}(t) - T). \tag{4.9.7}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación 4.9.5, obtenemos la ecuación diferencial estocástica híbrida en su forma canónica compensada (Definición 4.22):

$$dT(t) = \tilde{b}(t, T(t^-), \alpha(t^-))dt + \sigma(\alpha(t^-))dW(t) + \int_{\mathcal{Z}} \gamma(\alpha(t^-), z)\tilde{N}(dt, dz). \tag{4.9.8}$$

4.10. Verificación Analítica de la Existencia y Unicidad del Modelo

Demostraremos a continuación que la ecuación diferencial estocástica híbrida (Ecuación 4.9.8) y por la equivalencia algebraica antes mencionada la Ecuación 4.9.1 tiene una única solución fuerte càdlàg en el intervalo $[0, T]$, verificando que los procesos y coeficientes satisfacen todas las hipótesis del Teorema 4.9.

En primer lugar, por construcción del modelo, el movimiento Browniano $W(t)$, la medida aleatoria de Poisson $N(dt, dz)$ y la cadena de Markov $\alpha(t)$ son mutuamente independientes. Asimismo, dado que el espacio de estados $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ es finito y las tasas de transición de la matriz generadora $Q = (q_{ij})_{2\times 2}$ son finitas, entonces la cadena de Markov no presenta explosión en $[0, T]$. Adicionalmente, dado que la función de intensidad es acotada en el intervalo cerrado $[0, T]$, existe una constante $\lambda_{max} = \sup_{t\in[0,T]} \lambda(t) < \infty$, con lo cual $\int_0^T \lambda(t)dt \leq \lambda_{max} T < \infty$.

Para comprobar el cumplimiento de la condición de Lipschitz global (Ecuación 4.8.3), sean $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ dos valores cualesquiera de la variable de estado, $t \in [0, T]$ e $i \in \{1, 2\}$. Dado que el coeficiente de difusión $\sigma(i)$ (Ecuación 4.9.2, Ecuación 4.9.3) y la función de salto $\gamma(i, z)$ (Ecuación 4.9.4) dependen únicamente del régimen i y de la marca z, y son independientes del estado T, sus diferencias respecto a la variable de estado se anulan en ambos regímenes:

$$|\sigma(i) - \sigma(i)|^2 = 0, \qquad \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(i,z) - \gamma(i,z)|^2 \nu_t(dz) = 0.$$

Por otro lado, evaluando la diferencia cuadrática de la deriva compensada para el régimen $i = 1$ (Ecuación 4.9.6), los términos $\kappa_{on}\theta_{set}$ y $\lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i]$ se cancelan, obteniéndose:

$$\begin{aligned} |\tilde{b}(t,T_1,1) - \tilde{b}(t,T_2,1)|^2 &= |[\kappa_{on}(\theta_{set} - T_1) + \lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i]] - [\kappa_{on}(\theta_{set} - T_2) + \lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i]]|^2 \\ &= |-\kappa_{on}(T_1 - T_2)|^2 = \kappa_{on}^2 |T_1 - T_2|^2. \end{aligned}$$

De manera análoga, para el régimen $i = 2$ (Ecuación 4.9.7) el término $\kappa_{off} T_{amb}(t)$ se cancela al restar ambas expresiones, obteniéndose:

$$|\tilde{b}(t,T_1,2) - \tilde{b}(t,T_2,2)|^2 = \left|\kappa_{off}(T_{amb}(t) - T_1) - \kappa_{off}(T_{amb}(t) - T_2)\right|^2 = \kappa_{off}^2 |T_1 - T_2|^2.$$

Definiendo la constante $L = \max\{\kappa_{on}^2, \kappa_{off}^2\} > 0$, se cumple que para todo $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, e $i \in \{1,2\}$ que:

$$|\tilde{b}(t,T_1,i) - \tilde{b}(t,T_2,i)|^2 + |\sigma(i) - \sigma(i)|^2 + \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(i,z) - \gamma(i,z)|^2 \nu_t(dz) \leq L|T_1 - T_2|^2,$$

lo cual verifica la condición de Lipschitz global (Ecuación 4.8.3).

Resta verificar que los coeficientes satisfacen la condición de crecimiento lineal (Ecuación 4.8.4). Sea $(t,T_1,i) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \{1,2\}$ y denotemos por $T_{max} = \max\limits_{t\in[0,T]} |T_{amb}(t)| < \infty$ al máximo de la función continua $T_{amb}(t)$ en el compacto $[0,T]$. Aplicando la desigualdad elemental $|a-b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ del Lema 4.2 al coeficiente de deriva compensada en el régimen $i = 1$ (Ecuación 4.9.6), y acotando $\lambda(t) \leq \lambda_{max}$, se obtiene:

$$|\tilde{b}(t,T_1,1)|^2 = |(\kappa_{on}\theta_{set} + \lambda(t)\mathbb{E}[\gamma_i]) - \kappa_{on}T_1|^2 \leq 2\left(\kappa_{on}|\theta_{set}| + \lambda_{max}|\mathbb{E}[\gamma_i]|\right)^2 + 2\kappa_{on}^2|T_1|^2.$$

Aplicando la misma desigualdad algebraica a la deriva en el régimen $i = 2$ (Ecuación 4.9.7) y utilizando que $|T_{amb}(t)| \leq T_{max}$, se tiene que:

$$|\tilde{b}(t,T_1,2)|^2 = |\kappa_{off}T_{amb}(t) - \kappa_{off}T_1|^2 \leq 2\kappa_{off}^2 T_{max}^2 + 2\kappa_{off}^2|T_1|^2.$$

Para el término de difusión, se tiene en ambos regímenes la cota constante $|\sigma(i)|^2 \leq \Sigma_{max}$, donde $\Sigma_{max} = \max\{\sigma_{on}^2, \sigma_{off}^2\} < \infty$. Asimismo, evaluando la integral del coeficiente de

salto (Ecuación 4.9.4) respecto a la medida de intensidad $\nu_t(dz) = \lambda(t)dF(z)$, se tiene que para $i = 2$ dicha integral es nula, mientras que para $i = 1$ se cumple que:

$$\int_{\mathcal{Z}} |\gamma(1,z)|^2 \nu_t(dz) = \lambda(t) \int_{\mathcal{Z}} |z|^2 dF(z) = \lambda(t)\mathbb{E}[|\gamma_i|^2] \leq \lambda_{max} M_\gamma < \infty.$$

Sumando las cotas correspondientes a la deriva compensada, la difusión y la medida de saltos, y definiendo la constante positiva:

$$K = \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{2\left(\kappa_{on}|\theta_{set}| + \lambda_{max}|\mathbb{E}[\gamma_i]|\right)^2,\, 2\kappa_{off}^2 T_{max}^2\right\} + \Sigma_{max} + \lambda_{max} M_\gamma,\ \text{máx}\{2\kappa_{on}^2, 2\kappa_{off}^2\}\right\} > 0,$$

se deduce que para todo $(t, T_1, i) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \{1,2\}$ se satisface la desigualdad:

$$|\tilde{b}(t,T_1,i)|^2 + |\sigma(i)|^2 + \int_{\mathcal{Z}} |\gamma(i,z)|^2 \nu_t(dz) \leq K\left(1 + |T_1|^2\right),$$

verificando así la condición de crecimiento lineal (Ecuación 4.8.4).

Por lo tanto, dado que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.9, para cualquier condición inicial $T(0) = T_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\mathbb{R})$ y $\alpha(0) = \alpha_0 \in \{1,2\}$, la ecuación diferencial estocástica híbrida propuesta en la Ecuación 4.9.1 tiene una única solución fuerte $\{T(t)\}_{t\in[0,T]}$ adaptada a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, con trayectorias càdlàg casi seguramente y acotada en media cuadrática:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |T(t)|^2\right] < \infty,$$

por lo que $\{T(t)\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$. ⊠

5. Soluciones Numéricas de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En la práctica, la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas carecen de una solución analítica explícita debido a la estructura de sus coeficientes o al acoplamiento de múltiples perturbaciones. Por este motivo, resulta necesario recurrir a esquemas de aproximación numérica definidos sobre una discretización temporal. A diferencia del análisis numérico determinista, donde el error de aproximación se evalúa de manera puntual, en el cálculo estocástico la cercanía entre la solución exacta $X(t)$ y la aproximación numérica Y debe medirse en media cuadrática o en distribución sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (Kloeden y Platen 1992).

5.1. Tipos de Convergencia

Para establecer formalmente los criterios de convergencia, consideremos una partición regular del intervalo $[0, T]$, $P = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ compuesta por $N \in \mathbb{N}$ subintervalos de longitud constante $\Delta t = \frac{T}{N}$, cuyos nodos temporales están dados por $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, 1, \dots, N$. Denotaremos por Y_n al valor de la aproximación discreta en el nodo t_n, y por $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ al incremento correspondiente del movimiento Browniano estándar.

Definición 5.1 (Convergencia Fuerte)**.** Se dice que una aproximación numérica discreta $\{Y_n\}_{0 \le n \le N}$, obtenida con un tamaño de paso $\Delta t > 0$, converge en sentido **fuerte** con orden $\gamma > 0$ hacia la solución exacta $\{X(t)\}_{t \in [0,T]}$ en el tiempo terminal T si existen constantes positivas $C > 0$ y $\delta_0 > 0$, independientes de Δt, tales que para todo $\Delta t \in (0, \delta_0)$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\mathbb{E}\left[|X(T) - Y_N|\right] \le C(\Delta t)^{\gamma}.$$

Por la desigualdad de Lyapunov ($\mathbb{E}[|X(T) - Y_N|] \le (\mathbb{E}[|X(T) - Y_N|^2])^{1/2}$), el criterio de la Definición 5.1 suele establecerse demostrando que el error cuadrático medio cumple $\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |X(t) - \bar{Y}(t)|^2\right]\right)^{1/2} \le C(\Delta t)^{\gamma}$, donde $\bar{Y}(t)$ denota la extensión continua del esquema numérico. La convergencia fuerte controla el error promedio trayectoria por

trayectoria, por lo que lo hace el criterio adecuado cuando se requiere simular trayectorias individuales del proceso (Wang 2016).

Definición 5.2 (Convergencia Débil)**.** Se dice que una aproximación numérica discreta $\{Y_n\}_{0\leq n\leq N}$ converge en sentido **débil** con orden $\beta > 0$ hacia la solución exacta $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ en el tiempo terminal T si, para toda función de prueba $g \in \mathcal{C}_p^{2(\beta+1)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (funciones $2(\beta+1)$ veces continuamente diferenciables cuyas derivadas parciales tienen crecimiento a lo sumo polinomial), existen constantes positivas $C > 0$ y $\delta_0 > 0$, independientes de Δt, tales que para todo $\Delta t \in (0, \delta_0)$ se cumple que:

$$|\mathbb{E}[g(X(T))] - \mathbb{E}[g(Y_N)]| \leq C(\Delta t)^{\beta}.$$

A diferencia del criterio fuerte, la convergencia débil no exige cercanía trayectoria por trayectoria, sino que mide el error en la aproximación de los momentos estadísticos y de los valores esperados de funcionales de la solución (Wang 2016).

5.2. Esquema Numérico de Euler-Maruyama

El método de Euler-Maruyama es la generalización directa del método de Euler clásico, al cálculo estocástico de Itô. Consideremos la ecuación diferencial estocástica continua (Ecuación 4.5.1) expresada su en forma integral sobre el subintervalo $[t_n, t_{n+1}]$:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, X(s))ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s, X(s))dW(s).$$

Aproximando ambos integrandos mediante su evaluación constante en el extremo izquierdo $s = t_n$, se obtiene la relación recursiva del esquema de Euler-Maruyama:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \tag{5.2.1}$$

con condición inicial $Y_0 = x_0$.

Teorema 5.1 (Teorema de Convergencia del Método de Euler-Maruyama)**.** *Sea $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ la única solución fuerte de la EDE continua (Ecuación 4.5.1) con condición inicial $X(0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\mathbb{R})$, y sea $\{Y_n\}_{0\leq n\leq N}$ la aproximación generada por el esquema de Euler-Maruyama (Ecuación 5.2.1).*

1. *Si los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ satisfacen las condiciones de Lipschitz global y de crecimiento lineal del Teorema 4.3, además de la condición de continuidad temporal $|b(t,x)-b(s,x)|+|\sigma(t,x)-\sigma(s,x)| \leq K(1+|x|)|t-s|^{1/2}$, entonces el esquema de Euler-Maruyama converge en sentido* ***fuerte*** *con orden $\gamma = 0.5$:*

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq n\leq N}|X(t_n)-Y_n|^2\right]\right)^{1/2} \leq C(\Delta t)^{1/2}.$$

2. *Si adicionalmente los coeficientes $b, \sigma \in \mathcal{C}_p^4(\mathbb{R};\mathbb{R})$ poseen derivadas espaciales continuas hasta de cuarto orden con crecimiento polinomial, entonces el esquema de Euler-Maruyama converge en sentido* ***débil*** *con orden $\beta = 1.0$.*

La reducción del orden de convergencia fuerte a $\gamma = 0.5$ (frente al orden 1.0 del método de Euler clásico determinista) se debe a que la raíz de la varianza del incremento Browniano escala proporcionalmente a $\sqrt{\mathbb{E}[(\Delta W_n)^2]} = (\Delta t)^{1/2}$ (Kloeden y Platen 1992).

La implementación paso a paso del método de Euler-Maruyama se detalla en el alg. 5.1.

Algorithm 5.1.

Esquema numérico de Euler-Maruyama

1: ***1)*** *Dado un entero fijo $N > 0$, dividir el dominio temporal $[0,T]$ en $N+1$ nodos equidistantes $t_0, t_1, \ldots, t_N$, donde $\Delta t = T/N$ es el incremento temporal, $t_n = n\Delta t$ y $\Delta W_n \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)$ es el incremento Browniano correspondiente para $n = 0, \ldots, N-1$.*
2: ***2)*** *Asignar la condición inicial $Y_0 = x_0$.*
3: ***3)*** *Resolver recursivamente el sistema:*
4: ***Para*** *$n = 0, 1, \ldots, N-1$* ***Hacer***
5: *Generar una variable aleatoria normal estándar independiente $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$.*
6: *Calcular el incremento del proceso de Wiener: $\Delta W_n = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$.*
7: *Evaluar los coeficientes en el nodo actual: $b_n = b(t_n, Y_n)$ y $\sigma_n = \sigma(t_n, Y_n)$.*
8: *Actualizar el estado del proceso: $Y_{n+1} = Y_n + b_n\Delta t + \sigma_n \Delta W_n$.*
9: ***Fin Para***
10: ***4)*** *Retornar la trayectoria discreta aproximada del proceso: $\{Y_0, Y_1, \ldots, Y_N\}$.*

5.3. Esquema Numérico de Milstein

Para alcanzar un orden de convergencia fuerte superior cuando el coeficiente de difusión $\sigma(t,x)$ depende de la variable de estado $X(t)$, el método de Milstein incorpora el término de orden $\mathcal{O}(\Delta t)$ que viene de la expansión de Itô-Taylor (Kloeden y Platen 1992). Aplicando el Lema de Itô (Teorema 4.4) al coeficiente $\sigma(s, X(s))$ para $s \in [t_n, t_{n+1}]$, se tiene que $\sigma(s,X(s)) \approx \sigma(t_n, X(t_n)) + \sigma(t_n, X(t_n))\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t_n, X(t_n))(W(s) - W(t_n))$. Al sustituir esta

aproximación en la integral estocástica $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s, X(s))dW(s)$, se obiene una integral estocástica doble de Itô:

$$I_{(1,1),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s} dW(u)dW(s) = \frac{1}{2}\left[(\Delta W_n)^2 - \Delta t\right]. \tag{5.3.1}$$

Añadiendo esta corrección al esquema de Euler-Maruyama (Ecuación 5.2.1), se obtiene el esquema numérico de Milstein:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma(t_n, Y_n)\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t_n, Y_n)\left[(\Delta W_n)^2 - \Delta t\right]. \tag{5.3.2}$$

Teorema 5.2 (Teorema de Convergencia del Método de Milstein)**.** *Sea* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *la única solución fuerte de la EDE continua (Ecuación 4.5.1) con condición inicial* $X(0) = x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \mathbb{R})$*. Si el coeficiente de deriva* $b(t, x)$ *es continuamente diferenciable respecto a* x*, el coeficiente de difusión* $\sigma(t, x)$ *es dos veces continuamente diferenciable respecto a* x*, y tanto los coeficientes como las combinaciones* $b\frac{\partial b}{\partial x}$*,* $\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ *y* $\sigma^2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$ *satisfacen las condiciones de Lipschitz global y de crecimiento lineal uniformemente en todo* $t \in [0, T]$*, entonces el esquema numérico de Milstein (Ecuación 5.3.2) converge en sentido* ***fuerte*** *con orden* $\gamma = 1.0$*:*

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le n\le N} |X(t_n) - Y_n|^2\right]\right)^{1/2} \le C\Delta t.$$

La demostración detallada de este teorema mediante expansiones truncadas de Itô-Taylor se presenta en (Kloeden y Platen 1992).

La implementación paso a paso del método de Milstein se detalla en el alg. 5.2.

Algorithm 5.2.

Esquema numérico de Milstein

1: ***1)*** *Dado un entero fijo* $N > 0$*, dividir el dominio temporal* $[0, T]$ *en* $N + 1$ *nodos equidistantes* $t_0, t_1, \dots, t_N$*, donde* $\Delta t = T/N$ *es el incremento temporal,* $t_n = n\Delta t$ *y* $\Delta W_n \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0, 1)$ *es el incremento Browniano correspondiente para* $n = 0, \dots, N - 1$*.*
2: ***2)*** *Asignar la condición inicial* $Y_0 = x_0$*.*
3: ***3)*** *Resolver recursivamente el sistema con corrección de segundo orden:*
4: ***Para*** $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ***Hacer***
5: *Generar una variable aleatoria normal estándar independiente* $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$*.*

Esquema numérico de Milstein

6: *Calcular el incremento Browniano:* $\Delta W_n = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$.
7: *Evaluar* $b_n = b(t_n, Y_n)$, $\sigma_n = \sigma(t_n, Y_n)$ *y la derivada parcial* $\sigma'_n = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t_n, Y_n)$.
8: *Calcular la integral iterada de Itô:* $I_{(1,1),n} = \frac{1}{2}\left[(\Delta W_n)^2 - \Delta t\right]$.
9: *Actualizar el estado del proceso:* $Y_{n+1} = Y_n + b_n \Delta t + \sigma_n \Delta W_n + \sigma_n \sigma'_n I_{(1,1),n}$.
10: ***Fin Para***
11: ***4)*** *Retornar la trayectoria discreta aproximada del proceso:* $\{Y_0, Y_1, \ldots, Y_N\}$.

5.4. Análisis Comparativo de Convergencia Fuerte

Para mostrar la diferencia en el orden de convergencia fuerte entre los esquemas numéricos de Euler-Maruyama y de Milstein ante un término de difusión dependiente del estado, consideremos el Movimiento Browniano Geométrico (GBM), definido por la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea con ruido multiplicativo:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \tag{5.4.1}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es la tasa de deriva y $\sigma > 0$ es el parámetro de volatilidad. Aplicando el Lema de Itô (Teorema 4.4) a la función $f(x) = \ln(x)$ (o mediante la fórmula exponencial de la Sección 3.2 en (Situ 2005)), se obtiene que la solución de la Ecuación 5.4.1 está dada por:

$$X(t) = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t)\right]. \tag{5.4.2}$$

Dado que en la Ecuación 5.4.1 el coeficiente de difusión es lineal respecto al estado, $\sigma(t, x) = \sigma x$, su derivada parcial espacial es $\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t, x) = \sigma \neq 0$. Al omitir el término corrector $\frac{1}{2}\sigma^2 Y_n[(\Delta W_n)^2 - \Delta t]$, el método de Euler-Maruyama aproxima la difusión como constante dentro de cada subintervalo $[t_n, t_{n+1}]$, acumulando un error de truncamiento de orden $(\Delta t)^{1/2}$. Por el contrario, el método de Milstein incorpora dicho término cuadrático, alcanzando un orden de convergencia fuerte $\gamma = 1.0$ (Kloeden y Platen 1992).

En la Figura 5.1 se simula una trayectoria de la Ecuación 5.4.2 y de las aproximaciones de Euler-Maruyama y Milstein sobre el intervalo $[0, 2]$ utilizando la misma trayectoria Browniana, con parámetros $\mu = 0.05$, $\sigma = 1.0$, $X_0 = 1$ y un paso de discretización $\Delta t = 0.05$ $(N = 40)$.

Como se observa en la Figura 5.1, ante un coeficiente de difusión multiplicativo $\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} \neq 0\right)$, la aproximación del método de Euler-Maruyama se desvía de la solución exacta en las

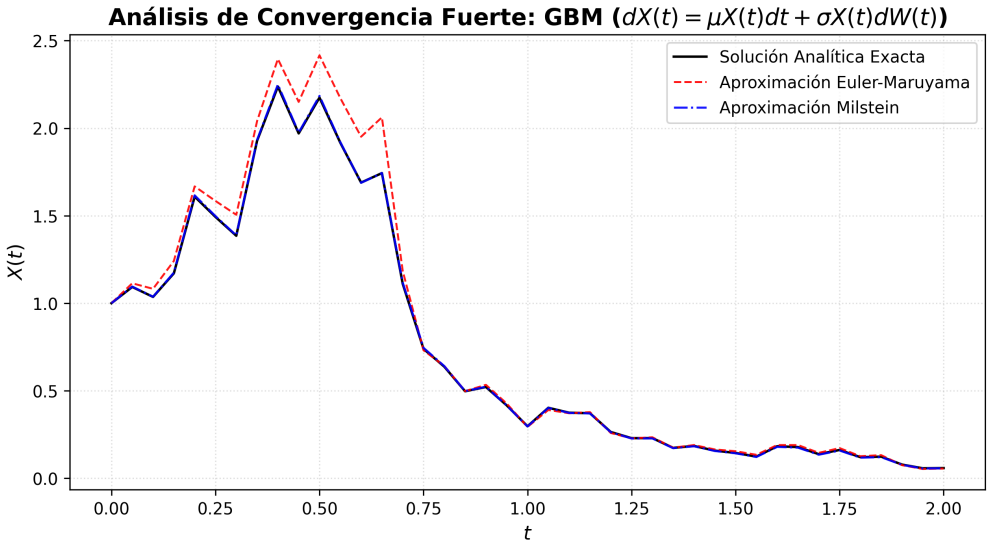


Figura 5.1.: Análisis de convergencia fuerte de esquemas numéricos estocásticos para una trayectoria del Movimiento Browniano Geométrico (GBM) definida por $dX = 0.05Xdt + XdW$ con $X_0 = 1$. El eje horizontal representa el avance en el tiempo y el eje vertical el estado del proceso $X(t)$. La línea negra continua representa la solución analítica exacta. La línea roja discontinua representa la aproximación del método de Euler-Maruyama (orden fuerte $\gamma = 0.5$), evidenciando desviaciones respecto a la solución exacta. Por último, la línea azul discontinua representa la aproximación del método de Milstein (orden fuerte $\gamma = 1.0$), el cual sigue con mayor precisión la solución exacta ante un ruido multiplicativo.

regiones de mayor variación del proceso de Wiener, mientras que el método de Milstein sigue prácticamente de forma idéntica la trayectoria de la solución exacta.

Por último, resulta fundamental destacar una propiedad que vincula ambos métodos cuando el ruido continuo es **aditivo** respecto a la variable de estado; esto es, cuando el coeficiente de difusión no depende de x, por lo que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} \equiv 0$. En tal caso, el término corrector de segundo orden en la Ecuación 5.3.2 se anula, es decir:

$$\frac{1}{2}\sigma(t_n, Y_n)\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t_n, Y_n)\left[(\Delta W_n)^2 - \Delta t\right] = 0,$$

lo que implica que **el esquema de Milstein y el esquema de Euler-Maruyama coinciden algebraicamente**. En particular, para nuestro modelo termodinámico híbrido (Ecuación 4.9.1), dado que dentro de cada régimen $i \in \{1, 2\}$ la volatilidad $\sigma(i) \in \{\sigma_{on}, \sigma_{off}\}$ es constante respecto a la temperatura $T(t)$ $\left(\frac{\partial \sigma(i)}{\partial T} = 0\right)$, el esquema de Euler-Maruyama reproduce de manera exacta la actualización del esquema de Milstein en la componente difusiva sin requerir el cálculo de derivadas parciales espaciales adicionales.

5.5. Esquemas Numéricos para EDES con Cambios de Régimen de Markov

Los métodos de Euler-Maruyama (Ecuación 5.2.1) y de Milstein (Ecuación 5.3.2) presentados previamente consideran coeficientes que dependen únicamente de difusiones continuas. Sin embargo, para aproximar numéricamente ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas cuyos parámetros cambian de acuerdo a una cadena de Markov a tiempo continuo $\{\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ sobre un espacio de estados finito $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m_0\}$, es necesario juntar la discretización temporal de la variable de estado continua con la simulación discreta de las transiciones de régimen (Yin y Zhu 2010; Mao y Yuan 2006).

Consideremos el sistema de difusión con cambio de régimen markoviano estudiado en el Capítulo 2 (Sección 2.2) y Capítulo 5 (Sección 5.2) de (Yin y Zhu 2010):

$$dX(t) = b(t, X(t), \alpha(t))dt + \sigma(t, X(t), \alpha(t))dW(t), \quad (X(0), \alpha(0)) = (x_0, i_0), \qquad (5.5.1)$$

donde $\alpha(t) \in \mathcal{M}$ tiene una matriz generadora infinitesimal $Q = (q_{ij})_{m_0\times m_0}$ que satisface la propiedad-q: $q_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$ y $q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}$. Sobre la partición regular $P = (t_0, t_1, \dots, t_N)$, $t_n = n\Delta t$ con tamaño de paso $\Delta t = T/N$, la restricción de la cadena de Markov a los nodos de la malla, denotada por $\alpha_n = \alpha(t_n)$, define una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto. La matriz de probabilidades de transición en

un paso $P(\Delta t) = (P_{ij}(\Delta t))_{m_0 \times m_0}$, donde $P_{ij}(\Delta t) = \mathbb{P}(\alpha_{n+1} = j \mid \alpha_n = i)$, está dada exactamente por la exponencial matricial y admite un desarrollo de Taylor de primer orden para tamaños de paso $\Delta t > 0$ suficientemente pequeños (Sección 5.3 y 6.4 de (Yin y Zhu 2010) y Sección 4.2 de (Mao y Yuan 2006)):

$$P(\Delta t) = \exp(\Delta t\, Q) = I + \Delta t\, Q + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right), \tag{5.5.2}$$

cuyas entradas de transición en un paso cumplen que:

$$P_{ij}(\Delta t) = \delta_{ij} + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) = \begin{cases} q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & \text{si } i \neq j, \\ 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & \text{si } i = j, \end{cases} \tag{5.5.3}$$

donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker. De manera equivalente, usando las propiedades de las cadenas de Markov a tiempo continuo, se tiene que la trayectoria de $\alpha(t)$ puede construirse de manera exacta en el dominio continuo muestreando tiempos de permanencia exponenciales con tasa $\lambda_i = -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ en el estado actual i, o bien mediante un Proceso de Poisson No Homogéneo Definición 4.9 cuando las tasas de transición dependen del tiempo $Q(t)$ (Sección 1.4 y 2.8 de (Yin y Zhu 2010); Sección 1.1 de (Platen y Bruti-Liberati 2010)), y posteriormente proyectando el estado activo sobre los nodos t_n.

Una vez determinado el estado del régimen discreto α_n en el nodo t_n, el esquema numérico de Euler-Maruyama con cambio de régimen se formula como:

$$Y_{n+1} = Y_n + b(t_n, Y_n, \alpha_n)\Delta t + \sigma(t_n, Y_n, \alpha_n)\Delta W_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5.5.4}$$

donde $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$ con $\{Z_n\}$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes $\mathcal{N}(0,1)$ independientes de la filtración generada por $\{Y_k, \alpha_k : k \leq n\}$.

Definiendo la interpolación constante a trozos $(Y^{\Delta t}(t), \alpha^{\Delta t}(t)) = (Y_n, \alpha_n)$ para $t \in [t_n, t_{n+1})$ y su extensión continua de tipo Itô, la convergencia fuerte del esquema queda garantizada gracias al siguiente teorema (Yin y Zhu 2010; Mao y Yuan 2006):

Teorema 5.3 (Teorema de Convergencia Fuerte de Euler-Maruyama con Cambio de Régimen)**.** *Supongamos que el generador Q es acotado y que para todo régimen $i \in \mathcal{M}$ los coeficientes de deriva $b(t,x,i)$ y de difusión $\sigma(t,x,i)$ satisfacen la condición de crecimiento lineal $(|b(t,x,i)|^2 + |\sigma(t,x,i)|^2 \leq K(1+|x|^2))$ y la condición de Lipschitz global $(|b(t,x,i) - b(t,z,i)|^2 + |\sigma(t,x,i) - \sigma(t,z,i)|^2 \leq K_0|x-z|^2)$ para todo $x, z \in \mathbb{R}$. Entonces, la aproximación numérica generada por el esquema (Ecuación 5.5.4) tiene momentos finitos de orden $p \geq 2$, $\sup_{0 \leq n \leq N} \mathbb{E}[|Y_n|^p] \leq (|x_0|^p + KT)\exp(KT) < \infty$, y*

converge en sentido ***fuerte*** *en media cuadrática hacia la solución exacta* $X(t)$ *de la Ecuación 5.5.1 satisfaciendo la cota:*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)-Y^{\Delta t}(t)|^2\right]=\mathcal{O}(\Delta t), \tag{5.5.5}$$

lo cual establece un orden de convergencia fuerte $\gamma = 0.5$ *en la norma* $L^2(\Omega)$*:* $\left(\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)-Y^{\Delta t}(t)|^2]\right)^{1/2}\leq C(\Delta t)^{1/2}$.

5.6. Esquemas Numéricos para EDES Híbridas con Cambios de Régimen de Markov y Saltos

Para completar la estructura numérica de nuestro modelo (Ecuación 4.9.1), debemos incorporar las discontinuidades de salto junto con la difusión Browniana y el cambio de régimen. De acuerdo con (Platen y Bruti-Liberati 2010), mientras que los esquemas adaptados a saltos insertan cada tiempo aleatorio de ocurrencia dentro de la malla, los **esquemas regulares** emplean una partición fija $t_n = n\Delta t$ y acumulan el impacto de los saltos ocurridos en cada subintervalo $[t_n, t_{n+1})$. Este ultimo enfoque resulta el adecuado para simulaciones de Monte Carlo acopladas a series meteorológicas en mallas temporales fijas (Δt).

Consideremos la EDE híbrida con saltos impulsada por una medida aleatoria de Poisson $p_\varphi(dv, dt)$ con intensidad finita $\lambda(t)$ sobre el espacio de marcas $\mathcal{E} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (Sección 1.8 de (Platen y Bruti-Liberati 2010)):

$$X(t)=X(0)+\int_0^t b(s,X(s),\alpha(s))ds+\int_0^t \sigma(s,X(s),\alpha(s))dW(s)+\int_0^t\int_{\mathcal{E}} c(s-,X(s-),\alpha(s-),v)p_\varphi(dv,ds) \tag{5.6.1}$$

Cuando las amplitudes de salto provienen de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{\gamma_j\}_{j\geq 1}$ y si los instantes de ocurrencia de los eventos siguen un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)\geq 0$ localmente integrable, entonces la integral de salto sobre $[t_n, t_{n+1})$ se reduce al incremento de un **Proceso de Poisson Compuesto**:

$$\Delta J_n=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\mathcal{E}} c(s-,X(s-),\alpha(s-),v)p_\varphi(dv,ds)\approx \mathbb{I}_{\{\alpha_n=1\}}\sum_{j=1}^{\Delta N_n}\gamma_{n,j}, \tag{5.6.2}$$

donde el número de saltos ΔN_n ocurridos en Δt se aproxima mediante:

$$\Delta N_n \sim \text{Poisson}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda(s)ds\right) \approx \text{Poisson}\left(\lambda(t_n)\Delta t\right), \tag{5.6.3}$$

adoptando la convención de que si $\Delta N_n = 0$, la suma vacía es cero ($\Delta J_n = 0$).

En nuestro modelo (Ecuación 4.9.1), la deriva $b(t, T, i)$ depende del estado T, mientras que la difusión $\sigma(i)$ y la amplitud de salto no dependen del estado T ($\partial_T \sigma = \partial_T c = 0$), con magnitudes de salto de varianza finita ($\mathbb{E}[\gamma^2] < \infty$). Por lo tanto, se satisfacen las condiciones de Lipschitz global y de crecimiento lineal, garantizando que el esquema híbrido de Euler-Maruyama converge fuertemente con orden $\gamma = 0.5$ y coincide en su parte continua con el método de Milstein (Sección 1.9 y 7.5 de (Platen y Bruti-Liberati 2010); Sección 5.6 de (Yin y Zhu 2010)).

La implementación paso a paso del método se resume en el alg. 5.3.

Algorithm 5.3.

Esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama con cambios de régimen y saltos

1: ***1)*** *Dado un entero fijo $N > 0$, dividir el dominio temporal $[0, T]$ en $N + 1$ nodos equidistantes $t_0, t_1, \dots, t_N$ con tamaño de paso $\Delta t = T/N$ y $t_n = n\Delta t$. Definir la matriz generadora $Q = (q_{ij})_{m_0 \times m_0}$, la intensidad de saltos $\lambda(t)$ y la distribución de las magnitudes de salto F_γ.*
2: ***2)*** *Asignar las condiciones iniciales del estado continuo $Y_0 = x_0$ y del régimen discreto $\alpha_0 = i_0 \in \mathcal{M}$.*
3: ***3)*** *Resolver recursivamente el sistema en cada subintervalo temporal:*
4: ***Para*** $n = 0, 1, \dots, N-1$ ***Hacer***
5: *Determinar el estado del régimen actual $\alpha_n \in \mathcal{M}$ (actualizando la cadena de Markov según las probabilidades de transición $P_{ij}(\Delta t) \approx \delta_{ij} + q_{ij}\Delta t$ o tiempos de permanencia del régimen).*
6: *Generar una variable aleatoria normal estándar independiente $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y calcular el incremento Browniano: $\Delta W_n = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$.*
7: *Generar el número de de saltos en el paso actual: $\Delta N_n \sim Poisson(\lambda(t_n)\Delta t)$.*
8: ***Si*** *$\Delta N_n > 0$ y el régimen permite saltos* ***Entonces***
9: *Generar ΔN_n magnitudes de salto independientes $\gamma_{n,1}, \dots, \gamma_{n,\Delta N_n} \sim F_\gamma$ y calcular la magnitud de salto acumulada: $\Delta J_n = \sum_{j=1}^{\Delta N_n} c(t_n, Y_n, \alpha_n, \gamma_{n,j})$.*
10: ***En Caso Contrario***
11: *Asignar $\Delta J_n = 0$.*
12: ***Fin Si***
13: *Evaluar los coeficientes del régimen activo: $b_n = b(t_n, Y_n, \alpha_n)$ y $\sigma_n = \sigma(t_n, Y_n, \alpha_n)$.*

Esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama con cambios de régimen y saltos

14: *Actualizar el estado del proceso:* $Y_{n+1} = Y_n + b_n \Delta t + \sigma_n \Delta W_n + \Delta J_n$.
15: ***Fin Para***
16: ***4)*** *Retornar la trayectoria discreta aproximada del proceso:*
$\{(Y_0, \alpha_0), (Y_1, \alpha_1), \ldots, (Y_N, \alpha_N)\}$.

Con el alg. 5.3 queda establecido el marco numérico necesario para integrar simultáneamente la difusión continua, los cambios de régimen de Markov y las perturbaciones por saltos de Poisson compuestos. Este esquema numérico será la base computacional en los capítulos siguientes para aproximar las trayectorias del modelo termodinámico de la cadena de frío y evaluar el riesgo operativo de almacenamiento.

6. Fundamentos Teóricos Epidemiológicos

En este capítulo se presentan los fundamentos biológicos, fisicoquímicos y epidemiológicos que vinculan la evolución de la temperatura interna del refrigerador con la pérdida de viabilidad de las vacunas y la gestión del inventario clínico. En primer lugar, se describen los mecanismos de termoestabilidad de los productos biológicos dentro de la red de frío. Posteriormente, se formula la cinética de degradación térmica mediante la ecuación de Arrhenius. Finalmente, se presenta el acoplamiento entre la degradación impulsada por la temperatura, el reabastecimiento logístico bajo incertidumbre y la demanda de inmunización bajo esquemas epidemiológicos.

6.1. Estabilidad Biológica e Integridad de la Red de Frío

Las vacunas son preparaciones biológicas compuestas por antígenos (virus atenuados, inactivados, subunidades proteicas o ácidos nucleicos), adyuvantes y estabilizantes cuya estructura molecular es altamente sensible a las variaciones térmicas (Yoshioka y Stella 2000). Para preservar su capacidad inmunogénica desde el laboratorio fabricante hasta su aplicación en el paciente, los lineamientos internacionales y normativos establecen que el almacenamiento en unidades de salud debe mantenerse estrictamente dentro del rango normativo de $[2°\text{C}, 8°\text{C}]$ (Organización Mundial de la Salud 2015).

Cuando la temperatura interna $T(t)$ del equipo de refrigeración está por fuera de este rango normativo, el biológico se expone a dos mecanismos de daño fisicoquímico distintos:

1. **Degradación térmica por calor ($T(t) > 8°\text{C}$):** El incremento de la energía cinética molecular acelera la ruptura de enlaces débiles y provoca la desnaturalización progresiva de las proteínas antigénicas. A diferencia de otros fallos mecánicos, el daño por calor es **acumulativo e irreversible**: cada excursión térmica por encima de los $8°\text{C}$ reduce de manera permanente una fracción de la potencia biológica del lote almacenado.
2. **Inactivación por congelación ($T(t) < 0°\text{C}$):** En vacunas que contienen adyuvantes de sales de aluminio, la formación de cristales de hielo rompe las fuerzas de adsorción entre el antígeno y el adyuvante, provocando la aglomeración irreversible de las partículas y la pérdida inmediata de la eficacia inmunológica, además del riesgo físico de la fractura en los viales de vidrio.

Asimismo, desde una perspectiva termodinámica, existe un desfase temporal entre la temperatura del aire dentro de la cámara de refrigeración y la temperatura real del líquido contenido en los frascos de vidrio. Debido a la capacidad calorífica del vidrio y del líquido biológico, el vial presenta **inercia térmica**, lo que amortigua fluctuaciones aéreas instantáneas y hace que un aumento en la temperatura se sostenga durante un intervalo crítico (típicamente del orden de 30 minutos) antes de desencadenar la degradación efectiva del antígeno.

6.2. Cinética de Degradación Térmica y la Ecuación de Arrhenius

En la estabilidad farmacéutica, la pérdida de potencia de un biológico producida por el calor se modela mediante leyes de cinética química. Sea $P(t) \in [0, 100]$ el porcentaje de potencia o viabilidad biológica remanente de un lote de vacunas en el tiempo t. Bajo una cinética de degradación de primer orden, la tasa instantánea de pérdida de viabilidad es proporcional a la potencia presente en ese instante (Atkins, Paula, y Keeler 2018; Yoshioka y Stella 2000):

$$\frac{dP(t)}{dt} = -k(T(t))P(t), \tag{6.2.1}$$

donde $k(T) > 0$ denota la constante de velocidad de reacción (o tasa de degradación térmica), la cual depende de manera no lineal de la temperatura a través de la relación formulada por Svante Arrhenius (Atkins, Paula, y Keeler 2018).

Definición 6.1 (Ecuación de Arrhenius)**.** Considere un sistema químico o biológico sujeto a una temperatura absoluta $T_K > 0$ (expresada en grados Kelvin, $T_K = T + 273.15$ con T en grados Celsius). La tasa de degradación térmica $k(T_K)$ está determinada por la siguiente relación exponencial:

$$k(T_K) = A \exp\left(-\frac{E_a}{R \cdot T_K}\right), \tag{6.2.2}$$

donde:

- $A > 0$ es el **factor preexponencial** (o factor de frecuencia, en s^{-1} o h^{-1}), que mide la frecuencia de colisiones moleculares con la orientación adecuada para la reacción.
- $E_a > 0$ es la **energía de activación** ($J \cdot mol^{-1}$), que representa la barrera energética mínima necesaria para romper la estabilidad conformacional del antígeno.
- $R = 8.314\,J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ es la **constante universal de los gases ideales**.

En los modelos deterministas clásicos de estabilidad acelerada, la temperatura se asume constante, lo que reduce a la Ecuación 6.2.1 a un decaimiento exponencial simple $P(t) = P(0)e^{-k(T_K)t}$ (Yoshioka y Stella 2000). Sin embargo, en una unidad de salud real, la temperatura interna $T(t)$ es un proceso estocástico determinado por la ecuación diferencial estocástica híbrida (Ecuación 4.9.1).

Al introducir la trayectoria del proceso estocástico $T(t)$ dentro de la Ecuación 6.2.2, la tasa de degradación $k(T(t))$ se convierte en un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2026). Considerando que el daño farmacológico se activa únicamente cuando la temperatura supera el extremo superior del rango normativo ($T(t) > 8°\text{C}$), tras superar el periodo de inercia térmica del vial, la fracción de biológico degradada en un subintervalo temporal $[t_n, t_{n+1}]$ de longitud Δt se determina mediante:

$$\Delta D_n = (1 - \exp\left[-k(T_K(t_n))\Delta t\right]) \mathbf{1}_{\{T(t_n)>8°\text{C}\}}, \tag{6.2.3}$$

donde $\mathbf{1}_{\{T(t_n)>8°\text{C}\}}$ es la función indicadora de excursión térmica.

6.3. Dinámica de Inventario y Demanda Epidemiológica

La evaluación del riesgo en la red de frío no puede limitarse solo a medir la pérdida porcentual teórica de un vial aislado, sino que debe traducirse en el número real de dosis destruidas (mermas físicas) durante la operación de una clínica de vacunación. Recientemente, en la literatura de modelado epidemiológico e investigación de operaciones (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2026), se ha establecido la necesidad de juntar la dinámica estocástica del inventario de vacunas y la incertidumbre en el reabastecimiento con la degradación térmica de los biológicos durante campañas de mitigación de epidemias.

En el marco epidemiológico clásico, la propagación de una enfermedad infecciosa en una población se describe mediante modelos de tipo **SEIR** (*Susceptibles, Expuestos, Infectados y Recuperados*) y sus extensiones con conteo de vacunación (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2026), donde la campaña de inmunización busca transferir individuos susceptibles hacia el compartimento protegido a una tasa de vacunación determinada. Como se demuestra en (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2025, 2026), la factibilidad de sostener dicha tasa de vacunación en el tiempo depende directamente de la integridad del inventario de dosis disponibles $I(t) \geq 0$ y de la preservación de un umbral mínimo de reserva de seguridad (*reserve level*).

Tomando como base estos modelos de gestión de biológicos bajo incertidumbre, la evolución temporal del inventario $I(t)$ en un centro de almacenamiento está dada por la interacción simultánea de tres flujos operativos:

1. **Demanda clínica y epidemiológica:** Representa la extracción de dosis para su aplicación en la población. En condiciones operativas regulares (apego normativo), esta demanda responde a los esquemas de vacunación programados y campañas de salud estacionales; en cambio, durante una contingencia epidemiológica o brote infeccioso, la urgencia por inmunizar a la población susceptible incrementa drásticamente la frecuencia de extracción y rotación del inventario.
2. **Merma por degradación impulsada por la temperatura:** Cuando ocurre una ruptura de la cadena de frío ($T(t) > 8°\text{C}$), la tasa cinética de Arrhenius $k(T(t))$ actúa directamente sobre el volumen total de dosis almacenadas en ese instante. En consecuencia, el número de dosis destruidas en el intervalo Δt es proporcional al inventario activo, esto es, $M_n = \Delta D_n \cdot I(t_n)$. Esta relación explica por qué una excursión térmica que coincide con un refrigerador lleno a su máxima capacidad produce pérdidas materiales severas, mientras que una rotación oportuna del inventario mitiga la exposición al riesgo eléctrico.
3. **Reabastecimiento logístico y umbral de reserva:** Para evitar el desabasto clínico, el sistema mantiene un umbral mínimo de reserva o punto de reorden $I_{reorden}$. Conforme el consumo clínico y las mermas reducen las existencias hasta cruzar este umbral crítico, se activa el reabastecimiento de nuevos lotes hasta restablecer la capacidad máxima del equipo I_{max}, proceso que en escenarios de contingencia involucra resurtidos y aperturas aleatorias modeladas mediante procesos de Poisson.

Adaptando estos principios (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2025, 2026) a nuestra malla temporal de simulación $t_n = n\Delta t$, el balance del inventario físico $I_n = I(t_n)$ sigue la siguiente relación recursiva:

$$I_{n+1} = I_n - C_n - \Delta D_n(I_n - C_n) + R_n, \tag{6.3.1}$$

donde C_n denota las dosis extraídas para vacunación en el paso n, $\Delta D_n(I_n - C_n)$ cuantifica las dosis inutilizadas por degradación térmica de Arrhenius (Ecuación 6.2.3), y $R_n = (I_{max} - I_n)\mathbf{1}_{\{I_n \leq I_{reorden}\}}$ representa la orden de reabastecimiento jurisdiccional. Con este acoplamiento teórico queda formalizado el vínculo completo entre el modelo termodinámico estocástico (Ecuación 4.9.1) y las métricas de impacto logístico y epidemiológico que se calibrarán y simularán en los capítulos siguientes.

Parte II.

Modelo Matemático

7. Estudio de Caso: Parametrización y Calibración del Modelo Matemático

7.1. Motivación y Contexto del Estudio

El presente capítulo traslada el marco teórico desarrollado previamente hacia un escenario de aplicación crítico para la salud pública: la cadena de frío para la preservación de vacunas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. La elección de esta región geográfica como caso de estudio responde a la combinación de condiciones climatológicas de calor extremo y a la vulnerabilidad de la infraestructura eléctrica local frente a fenómenos meteorológicos estacionales, entorno bajo el cual los equipos de refrigeración institucionales operan sujetos a un estrés térmico continuo.

Con el propósito de garantizar la validez física y operativa del modelo matemático, se evita el uso de parámetros arbitrarios en la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) híbrida, dado que asignar tasas de intensidad o volatilidades sin sustento empírico produciría trayectorias desconectadas de la realidad clínica. En consecuencia, el objetivo central de este capítulo consiste en calibrar rigurosamente todas las variables del sistema a partir de registros oficiales, leyes físicas y especificaciones técnicas internacionales.

El proceso de estimación y asignación de parámetros se estructura en las siguientes cuatro fases analíticas:

1. **Caracterización Estocástica del Suministro Eléctrico:** A partir de registros históricos e indicadores oficiales de continuidad (SAIFI y SAIDI) de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), junto con un factor de reducción de escala espacial, se modela la frecuencia anual de los apagones mediante un Proceso de Poisson No Homogéneo y la duración de las fallas por temporada climática mediante distribuciones Log-Normales estacionales.
2. **Calibración Termodinámica y de Perturbaciones por Apertura:** Utilizando las especificaciones de precalificación de la Organización Mundial de la Salud (OMS) para el refrigerador **Haier HBC-150** y la ley de enfriamiento de Newton, se deducen las tasas de transferencia térmica ($\kappa_{on}, \kappa_{off}$) y las volatilidades ($\sigma_{on}, \sigma_{off}$) en ambos regímenes de operación, así como la frecuencia y magnitud de los saltos térmicos (γ_i) inducidos por las aperturas de puerta con base en estudios experimentales del NIST.

3. **Cinética de Degradación Térmica:** Se parametriza la Ecuación de Arrhenius para cuantificar la tasa de desnaturalización proteica y el daño térmico acumulado que sufren los biológicos cuando la temperatura interna rebasa el umbral normativo superior ($T(t) > 8°C$).
4. **Dinámica de Inventario y Demanda Clínica Estacional:** Finalmente, se establecen la capacidad máxima de almacenamiento, el punto de reorden jurisdiccional y la demanda mensual de vacunación en México, acoplando el consumo de dosis con el proceso de aperturas de puerta bajo tres escenarios operativos: control absoluto (Escenario A), apego normativo (Escenario B) y contingencia epidemiológica (Escenario C).

7.2. Datos Base e Histórico de Interrupciones Eléctricas

El objetivo de esta fase es modelar la tasa de ocurrencia y la escala temporal de las interrupciones del suministro eléctrico en el área geográfica de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Para evitar supuestos teóricos alejados de la realidad operativa de la red local, los datos de partida no se asignaron de manera arbitraria, sino que se obtuvieron a través de los registros oficiales de la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Mediante una solicitud de información pública de transparencia dirigida a la CFE, se obtuvo el registro histórico del promedio mensual de interrupciones y su duración para el municipio de Tuxtla Gutiérrez.

A partir de dicha solicitud, se recabó el comportamiento histórico del municipio para el periodo comprendido entre los años 2019 y 2025. La Tabla 7.1 contiene dicha información, presentando el número de interrupciones promedio por mes y la duración promedio en horas por cada corte de energía.

Tabla 7.1.: Interrupciones eléctricas en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas (Fuente: Solicitud de Transparencia a la CFE).

Año	Número de interrupciones promedio por mes	Duración Promedio de las interrupciones (Horas)
2019	25	2.02
2020	42	1.73
2021	47	2.03
2022	40	2.59
2023	49	2.23
2024	43	2.39
2025	38	2.02

El análisis de la Tabla 7.1 muestra un incremento significativo en la frecuencia de fallas a partir del año 2020, estabilizándose en una franja superior a los 40 cortes mensuales.

Este cambio se debe al crecimiento de la carga térmica residencial e industrial y a la saturación de los transformadores de distribución en la mancha urbana.

Para la calibración de la EDE en este trabajo de investigación, se seleccionó el año **2024** como el escenario de línea base. Dicho año presenta una media mensual de **43 interrupciones por mes** con una duración promedio por corte de **2.39 horas**. Al proyectar esta tasa mensual a una tasa anual, se tiene que el número total de interrupciones al año esperadas a nivel municipal (N_{total}) es:

$$N_{total} = 43 \text{ cortes/mes} \times 12 \text{ meses} = 516 \text{ cortes/año} \tag{7.2.1}$$

7.3. Corrección de Escala Espacial (Factor $\kappa_{espacial}$)

7.3.1. Justificación de la Reducción de Escala

El valor de 516 cortes al año obtenido en la Ecuación 7.2.1 es un dato agregado de todo el municipio, así que utilizar directamente este valor para un solo refrigerador implicaría asumir que el centro de almacenamiento de vacunas sufre más de un apagón diario, lo cual no es físicamente real. Este error ocurre al ignorar que un edificio está conectado a un solo nodo de la red, no a todos simultáneamente.

Para solucionar esto, introducimos un factor de escala espacial. De acuerdo con el Programa para el Desarrollo del Sistema Eléctrico Nacional (PRODESEN) y los diagramas de infraestructura del Centro Nacional de Control de Energía (CENACE) (Secretaría de Energía 2024), la mancha urbana de Tuxtla Gutiérrez está alimentada de manera sectorizada por exactamente **8 subestaciones principales** de distribución (Tuxtla Céntrica, Oriente, Poniente, Terán, Tuxtla Norte, Tuxtla Dos, Mactumatzá y Real del Bosque).

7.3.2. La Esperanza Matemática Local

Asumiendo que los cortes de energía se distribuyen de manera uniforme sobre estas subestaciones, la probabilidad p de que un corte afecte a la subestación de interés (Tuxtla Norte, encargada de alimentar la zona de hospitales y laboratorios de la Colonia Maya) es $p = 1/8$.

Por consiguiente, el número de cortes que tiene el centro de almacenamiento de vacunas se comporta como una variable aleatoria binomial $N_{local} \sim \mathcal{B}(N_{total}, p)$, cuya esperanza matemática es:

$$\mathbb{E}[N_{local}] = N_{total} \times p = \frac{516 \text{ cortes}}{8 \text{ subestaciones}} = 64.5 \approx 64 \text{ cortes al año} \tag{7.3.1}$$

Al redondear la esperanza a un número entero, establecemos una base realista de **64 interrupciones esperadas al año** para nuestra simulación.

7.4. Distribución Temporal de las Fallas

Las interrupciones no ocurren de manera homogénea a lo largo del año (es decir, no ocurren exactamente 5.33 cortes cada mes). La variabilidad mensual depende directamente de los factores climáticos estacionales de la región. Para no asignar los apagones de cada mes de manera aleatoria, utilizamos el comportamiento documentado en el *Informe Anual de la CFE 2024* (Comisión Federal de Electricidad 2024), específicamente en su página 82, donde se registra la evolución de los indicadores de continuidad del servicio a lo largo de los meses.

Para comprender la estructura de estos datos oficiales, la CFE evalúa la continuidad del suministro a través de dos indicadores internacionales de confiabilidad:

7.4.1. 1. Índice de la Frecuencia de Interrupción Promedio, en número (SAIFI)

El indicador SAIFI (*System Average Interruption Frequency Index*) contabiliza el número promedio de interrupciones sostenidas que experimenta un usuario durante un periodo determinado (generalmente un año o un mes), es decir si se tiene una red eléctrica con un total de N_T usuarios atendidos. Si en un intervalo de observación ocurren M eventos de interrupción, donde cada evento $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ afecta a una cantidad de N_i usuarios, el índice SAIFI se expresa formalmente como:

$$\text{SAIFI} = \frac{\sum_{i=1}^{M} N_i}{N_T} \tag{7.4.1}$$

7.4.2. 2. Índice de Duración Promedio de Interrupción, en minutos (SAIDI)

El indicador SAIDI (*System Average Interruption Duration Index*) mide la duración total acumulada de las interrupciones sostenidas que experimenta el usuario promedio dentro del periodo de evaluación. Si cada evento de falla i tiene una duración temporal de r_i horas, el índice SAIDI se define analíticamente mediante:

$$\text{SAIDI} = \frac{\sum_{i=1}^{M} N_i r_i}{N_T} \tag{7.4.2}$$

A partir de estas definiciones, la Tabla 7.2 presenta la evolución mensual acumulada de los indicadores SAIDI y SAIFI reportada en la página 82 del informe anual de la CFE.

Tabla 7.2.: Evolución mensual acumulada de los indicadores SAIDI y SAIFI (Fuente: Informe Anual CFE 2024, p. 82).

Mes	SAIDI Acumulado (Horas)	SAIFI Acumulado
Enero	0.998	0.013
Febrero	1.110	0.017
Marzo	1.285	0.022
Abril	2.793	0.027
Mayo	4.120	0.037
Junio	5.774	0.053
Julio	6.557	0.065
Agosto	7.905	0.080
Septiembre	8.592	0.096
Octubre	9.063	0.103
Noviembre	9.314	0.106
Diciembre	10.812	0.113

Dado que el informe de la CFE publica el indicador SAIFI de forma acumulada, es necesario calcular la diferencia marginal (Δ) respecto al mes anterior para obtener el peso estadístico de cada mes de forma individual:

$$\Delta\text{SAIFI}_i = \text{SAIFI}_i - \text{SAIFI}_{i-1} \tag{7.4.3}$$

Para distribuir los 64 cortes anuales calculados para la subestación local respetando esta estacionalidad, aplicamos una regla de tres simple basada en la proporcionalidad marginal. Suponiendo que el valor total del SAIFI al final del año (0.113) representa el 100 % de las fallas (equivalente a los 64 cortes), entonces el incremento mensual generado en cada periodo (ΔSAIFI_i) representará una fracción directamente proporcional de cortes. Expresado de forma general para cualquier mes i, la asignación viene dada por:

$$\text{Cortes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIFI}_i}{\text{SAIFI}_{total}} \right) \times \mathbb{E}[N_{local}] \tag{7.4.4}$$

Sustituyendo los valores de nuestro escenario ($\text{SAIFI}_{total} = 0.113$ y $\mathbb{E}[N_{local}] = 64$), la ecuación del modelo es:

$$\text{Cortes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIFI}_i}{0.113} \right) \times 64 \tag{7.4.5}$$

Al hacer este cálculo y redondeando al entero más cercano (realizando un ajuste para conservar la suma total en 64 cortes anuales), obtenemos la distribución estacional de las fallas eléctricas presentada en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3.: Distribución estacional de los 64 cortes calculada mediante proporcionalidad sobre el SAIFI 2024.

Mes	Δ SAIFI (Mensual)	Cortes Exactos Calculados	Cortes Asignados (Redondeo)
Enero	0.013	7.36	7
Febrero	0.004	2.26	2
Marzo	0.005	2.83	3
Abril	0.005	2.83	3
Mayo	0.010	5.66	6
Junio	0.016	9.06	9
Julio	0.012	6.79	7
Agosto	0.015	8.49	8
Septiembre	0.016	9.06	9
Octubre	0.007	3.96	4
Noviembre	0.003	1.70	2
Diciembre	0.007	3.96	4

El análisis de la Tabla 7.3 revela con claridad los dos momentos estacionales de mayor vulnerabilidad y frecuencia de cortes en el suministro eléctrico de la región. El pico más severo se registra en **Junio (9 cortes)**, un fenómeno ocasionado por las altas temperaturas extremas registradas en Tuxtla Gutiérrez durante la primavera-verano, las cuales provocaron una saturación en la red de distribución eléctrica debido al uso masivo y simultáneo de sistemas de aire acondicionado. El segundo periodo crítico ocurre durante **Agosto y Septiembre (8 y 9 cortes respectivamente)**, coincidiendo directamente con el máximo histórico de la temporada de lluvias, tormentas tropicales y huracanes en el Sureste mexicano, eventos climáticos que suelen derribar líneas de alta tensión y afectar transformadores locales. En contraste, la época invernal se consolida como el periodo de máxima estabilidad en el servicio.

7.5. Modelado del Proceso de Poisson No Homogéneo (PPNH)

Para integrar las interrupciones eléctricas dentro de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) en tiempo continuo t, donde $t \in [0, 365]$ representa los días del año, utilizamos un **Proceso de Poisson No Homogéneo** (Definición 4.9), cuya función de intensidad

$\lambda(t)$ varía en función del tiempo para tener en cuenta la estacionalidad climática de la región.

El modelo se construye mediante la suma de una tasa base de fondo y dos funciones de perturbación gaussianas no normalizadas. La elección de núcleos gaussianos permite modelar la transición gradual de las estaciones meteorológicas sin introducir discontinuidades de salto, concentrando el riesgo exactamente en los días donde el clima somete a la red a mayor estrés.

La función analítica propuesta para la intensidad diaria de fallas es:

$$\lambda(t) = \lambda_{base} + A_1 \exp\left(-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \tag{7.5.1}$$

7.5.1. Calibración mediante la Regla Empírica (68-95-99.7)

Para deducir la dispersión exacta de las campanas (σ_1 y σ_2), recurrimos a la regla empírica de la distribución normal, la cual establece que el **95.4 % de los datos** se concentra a una distancia de $\pm 2\sigma$ respecto a la media. Igualando esta amplitud (un ancho total de 4σ) a la duración física en días de cada temporada climática en Chiapas, obtenemos la siguiente calibración analítica:

- **Tasa Base ($\lambda_{base} = 0.0667$):** Representa el riesgo mínimo constante por fallas accidentales o mantenimientos de la red, independiente del clima. Se calcula a partir de los meses más estables (febrero y noviembre, con 2 cortes al mes), resultando en 2 cortes/30 días ≈ 0.0667 cortes/día.
- **Ola de Calor ($\mu_1 = 152$ y $\sigma_1 = 45$):** El primer pico térmico se centra a principios de junio (día 152). La temporada de calor abarca históricamente 6 meses (de marzo a agosto, ≈ 180 días). Aplicando la regla empírica, $4\sigma_1 = 180 \implies \sigma_1 = 45$. Elevando al cuadrado, la varianza estacional queda en $2\sigma_1^2 = 4050$.
- **Temporada de Lluvias ($\mu_2 = 244$ y $\sigma_2 = 30$):** El segundo pico se centra a inicios de septiembre (día 244), el momento más severo de tormentas. Esta temporada abarca 4 meses (julio a octubre, ≈ 120 días). Aplicando la regla empírica, $4\sigma_2 = 120 \implies \sigma_2 = 30$. Su varianza estacional queda en $2\sigma_2^2 = 1800$.

7.5.2. Sistema de Amplitudes Cruzadas (A_1 y A_2)

Para que los picos máximos en $t = 152$ y $t = 244$ alcancen exactamente una intensidad de 0.30 cortes/día (equivalente a los 9 cortes mensuales reportados empíricamente en junio y septiembre), no basta con restar la tasa base de 0.0667. Al estar las campanas cercanas en el tiempo, la "cola" derecha del pico de calor contribuye a la intensidad durante la temporada de lluvias, y viceversa.

Para obtener las amplitudes exactas (A_1 y A_2), se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones evaluado en los centros μ_1 y μ_2:

$$\begin{cases} \lambda(152) = 0.0667 + A_1(1) + A_2 \exp\left(-\frac{(152-244)^2}{1800}\right) = 0.30 \\ \lambda(244) = 0.0667 + A_1 \exp\left(-\frac{(244-152)^2}{4050}\right) + A_2(1) = 0.30 \end{cases}$$

Evaluando los términos exponenciales:

$$\begin{cases} A_1 + 0.009A_2 = 0.2333 \\ 0.123A_1 + A_2 = 0.2333 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, obtenemos los valores de las amplitudes: $A_1 = 0.2314$ y $A_2 = 0.2048$. Sustituyendo todos los coeficientes, la función de intensidad es:

$$\lambda(t) = 0.0667 + 0.2314 \exp\left(-\frac{(t-152)^2}{4050}\right) + 0.2048 \exp\left(-\frac{(t-244)^2}{1800}\right) \tag{7.5.2}$$

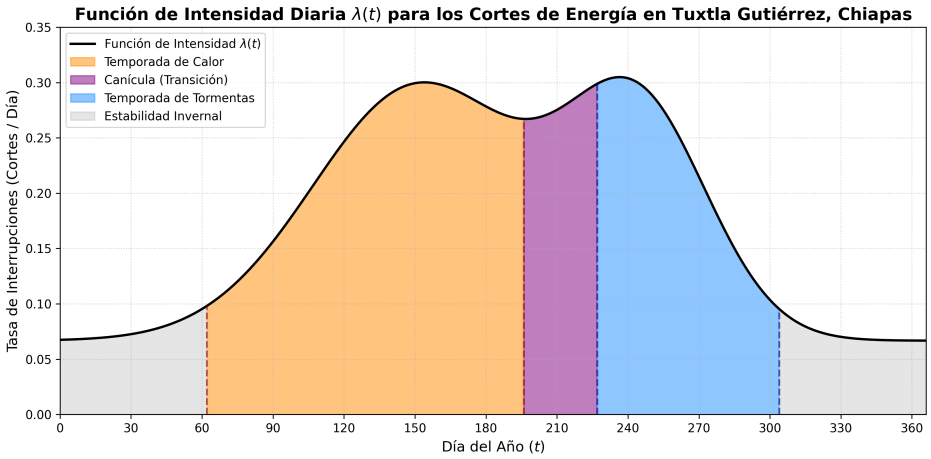


Figura 7.1.: Función de intensidad diaria de fallas eléctricas $\lambda(t)$. El área sombreada bajo la curva representa las temporadas climáticas del año: temporada de calor en naranja (días 62 a 196), canícula en púrpura (días 196 a 227), temporada de tormentas en azul (días 227 a 304) y estabilidad invernal en gris.

Como se aprecia en la Figura 7.1, el área bajo la curva de la función de intensidad $\lambda(t)$ se divide en cuatro regiones climáticas fundamentales para reflejar el comportamiento térmico de Tuxtla Gutiérrez:

- **Estabilidad Invernal (Área Gris, Días $0 \leq t < 62$ y $304 < t \leq 366$):** Abarca desde el 1 de enero hasta principios de marzo, y del 1 de noviembre al 31 de

diciembre. Representa el periodo de menor demanda térmica y mayor estabilidad operacional de la red eléctrica, donde la intensidad responde únicamente a la tasa base de fallas accidentales o mantenimientos de la red ($\lambda_{base} = 0.0667$).

- **Temporada de Calor y Estiaje (Área Naranja, Días $62 \leq t < 196$):** Comprende del 2 de marzo al 15 de julio, alcanzando su pico máximo en $t = 152$ (1 de junio). En este periodo, las temperaturas extremas provocan la saturación de los transformadores por el uso intensivo de aire acondicionado.
- **La Canícula (Área Púrpura, Días $196 \leq t < 227$):** Abarca aproximadamente 30 días, desde el 15 de julio hasta el 15 de agosto. Corresponde a la zona de transición e intersección entre ambas campanas gaussianas. Este fenómeno meteorológico se caracteriza por una disminución temporal de las precipitaciones y un repunte del calor extremo a mitad del verano, lo que somete al sistema eléctrico a un estrés continuo antes de la llegada de las tormentas severas.
- **Temporada de Tormentas y Ciclones (Área Azul, Días $227 \leq t \leq 304$):** Comprende del 15 de agosto al 31 de octubre, con su punto crítico centrado en $t = 244$ (1 de septiembre). Representa la máxima incidencia de precipitación y eventos meteorológicos extremos capaces de derribar líneas de alta tensión.

7.6. Validación del Modelo y Análisis de la Anomalía de Enero

Por los fundamentos de los Procesos de Poisson No Homogéneos, el número esperado de cortes en cualquier intervalo $(t_1, t_2]$ está determinado por la integral definida de su función de intensidad:

$$\mathbb{E}[N(t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt \tag{7.6.1}$$

Para validar la consistencia analítica de nuestra función $\lambda(t)$, particionamos el año de 366 días (considerando que el **año 2024 fue bisiesto**, por lo que febrero aporta 29 días al dominio) en 12 subintervalos correspondientes a los días acumulados de cada mes. Al resolver numéricamente sus respectivas integrales mediante cuadratura gaussiana, contrastamos el área teórica bajo la curva contra los objetivos empíricos de la CFE:

Tabla 7.4.: Validación de los Valores Esperados Teóricos vs. Datos Empíricos de la CFE 2024.

Mes	Intervalo de Integración $[t_{i-1}, t_i]$	Objetivo Empírico (CFE)	Esperanza calculada $\mathbb{E}[N]$
Enero	$[0, 31]$	7	2.15
Febrero	$[31, 60]$	2	2.37
Marzo	$[60, 91]$	3	3.82
Abril	$[91, 121]$	3	6.12

Mes	Intervalo de Integración $[t_{i-1}, t_i]$	Objetivo Empírico (CFE)	Esperanza calculada $\mathbb{E}[N]$
Mayo	$[121, 152]$	6	8.73
Junio	$[152, 182]$	9	8.74
Julio	$[182, 213]$	7	8.39
Agosto	$[213, 244]$	8	9.20
Septiembre	$[244, 274]$	9	7.70
Octubre	$[274, 305]$	4	4.27
Noviembre	$[305, 335]$	2	2.31
Diciembre	$[335, 366]$	4	2.09

La suma acumulada de las 12 integrales arroja un total de **65.90 cortes esperados** a lo largo del año. Este resultado demuestra una congruencia matemática robusta frente a los 64 cortes teóricos calculados inicialmente. La diferencia de +2 cortes anuales funciona como un margen de seguridad metodológico, garantizando que el modelo numérico no subestime el estrés real sobre la red de frío.

Finalmente, es importante destacar la inexactitud observada exclusivamente en el mes de **Enero** (7 cortes empíricos frente a los 2.15 esperados por la integral). Dado que enero es un periodo climatológicamente estable (sin huracanes ni olas de calor), esta desviación es originada muy probablemente por mantenimientos extraordinarios o contingencias locales impredecibles ocurridas específicamente a inicios del año 2024.

7.7. Distribución Log-Normal de las Duraciones de las Fallas eléctricas

Una vez modelada la frecuencia con la que ocurren las interrupciones eléctricas mediante el Proceso de Poisson, el siguiente componente crítico es determinar la duración exacta de cada apagón (D). En teoría de probabilidad aplicada a la ingeniería de confiabilidad, el tiempo de reparación o restablecimiento de un sistema no sigue a una distribución normal estándar.

La duración de una falla eléctrica es una variable aleatoria continua que presenta las siguientes dos características principales:

1. **Dominio estrictamente positivo:** El tiempo de interrupción no puede tomar valores negativos ($D > 0$).
2. **Asimetría positiva (Cola pesada hacia la derecha):** La inmensa mayoría de las fallas locales se resuelven en pocas horas (e.g., restablecimiento de fusibles o reconexiones de subestación), pero existe una probabilidad baja de eventos atípicos severos cuya reparación demora días enteros (e.g., explosión de transformadores o colapso de torres por huracanes).

Debido a que una distribución Normal clásica asignaría probabilidad a tiempos negativos y subestimaría el riesgo de cortes prolongados, la literatura establece que las duraciones de las interrupciones eléctricas se modelan mediante una **Distribución Log-normal** (Brown y McDonald 2007; Billinton y Allan 1996):

$$D \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2) \tag{7.7.1}$$

Para calibrar el parámetro μ (media de los logaritmos) y el parámetro σ (desviación estándar de los logaritmos) para cada temporada, es necesario utilizar los indicadores de la CFE.

7.7.1. Desglose Mensual de Horas de Interrupción

De acuerdo con el registro histórico municipal consolidado para el año 2024, la duración promedio de un corte en Tuxtla Gutiérrez fue de 2.39 **horas por corte** Tabla 7.1. Sabiendo que el factor de escala espacial redujo el riesgo de la unidad de salud a un promedio de 64 **cortes al año**, podemos calcular la cantidad total de tiempo que el refrigerador clínico experimentará desabasto eléctrico a lo largo de todo el año:

$$\text{Horas Totales Anuales} = 64 \text{ cortes/año} \times 2.39 \text{ horas/corte} = 152.96 \text{ horas}$$

Para distribuir estas 152.96 horas a lo largo de los 12 meses del año, respetando la intensidad de daño a la infraestructura propia de cada época del año, utilizamos el indicador de duración acumulada SAIDI del *Informe Anual de la CFE 2024* Tabla 7.2.

El primer paso consiste en calcular la diferencia marginal ($\Delta\text{SAIDI}_i = \text{SAIDI}_i - \text{SAIDI}_{i-1}$) para obtener el peso de cada mes individual. Posteriormente, aplicamos una **regla de 3 simple**: asumiendo que el valor total del SAIDI acumulado total (10.812 horas) representa el 100 % de la afectación anual (equivalente a nuestras 152.96 horas proyectadas), entonces el incremento de cualquier mes i representará una fracción directamente proporcional de horas de corte para el centro de almacenamiento. Analíticamente, la ecuación de asignación es:

$$\text{Horas del Mes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIDI}_i}{\text{SAIDI}_{total}} \right) \times \text{Horas Totales Anuales}$$

Sustituyendo los valores de nuestro escenario ($\text{SAIDI}_{total} = 10.812$ y Horas Totales $= 152.96$), el modelo de asignación mensual queda como:

$$\text{Horas del Mes}_i = \left(\frac{\Delta\text{SAIDI}_i}{10.812} \right) \times 152.96$$

Finalmente, para conocer la duración media esperada de un corte individual en un mes específico (E_i), se divide el número de horas asignadas a dicho mes entre la cantidad de cortes de ese mes calculados previamente en la Tabla 7.3. Es decir, E_i = Horas del Mes$_i$/Cortes$_i$. Al hacer estos cálculos se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 7.5.: Estimación de la duración promedio mensual por corte a partir de los indicadores SAIDI 2024.

Mes	SAIDI Acumulado	Δ SAIDI	Duración Acumulada de las Interrupciones en el Mes	Cortes del Mes	Duración Promedio E_i (Horas)
Enero	0.998	0.998	14.12	7	2.017
Febrero	1.110	0.112	1.58	2	0.790
Marzo	1.285	0.175	2.48	3	0.827
Abril	2.793	1.508	21.33	3	7.110
Mayo	4.120	1.327	18.77	6	3.128
Junio	5.774	1.654	23.40	9	2.600
Julio	6.557	0.783	11.08	7	1.583
Agosto	7.905	1.348	19.07	8	2.384
Septiembre	8.592	0.687	9.72	9	1.080
Octubre	9.063	0.471	6.66	4	1.665
Noviembre	9.314	0.251	3.55	2	1.775
Diciembre	10.812	1.498	21.19	4	5.298

7.7.2. Cálculo de Medias y Varianzas por Temporada Climática

Para integrar con precisión la duración de los cortes dentro de los regímenes estacionales de la EDE, es necesario agrupar los datos mensuales de la Tabla 7.5 en las tres temporadas climáticas previamente delimitadas en el análisis del Proceso de Poisson. La conformación dichos grupos se debe a las siguientes razones termodinámicas:

1. **Temporada de Calor (Abril a Julio):** Agrupa el periodo de máximo estiaje y temperaturas extremas, culminando en la canícula. Durante este cuatrimestre, la saturación térmica de los equipos de distribución eléctrica es máxima.
2. **Temporada de Lluvias (Agosto a Octubre):** Concentra el periodo crítico de huracanes y tormentas, caracterizado por daños mecánicos sobre la red eléctrica.
3. **Estabilidad Invernal (Enero a Marzo, Noviembre y Diciembre):** Meses de baja exigencia térmica ambiental, donde los apagones ocurren mayoritariamente a factores de mantenimiento.

Realizar un promedio aritmético simple de las duraciones E_i entre los meses de cada temporada introduciría un sesgo grave, ya que asignaría el mismo peso a un mes con 9 cortes que a uno con solo 2 cortes. Para garantizar la rigurosidad estadística, se calcula la media empírica ($\mathbb{E}[D]$) y la varianza empírica ($\mathbb{V}[D]$) mediante un modelo de **estadística descriptiva ponderada**, donde el peso de cada mes (ω_i) está dado por su frecuencia de cortes ($\omega_i = \text{Cortes}_i$).

Asi, las formulaciones para la esperanza y la varianza ponderada están dadas por:

$$\mathbb{E}[D] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i E_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} = \frac{\text{Horas Acumuladas de la Temporada}}{\text{Cortes Totales de la Temporada}} \tag{7.7.2}$$

$$\mathbb{V}[D] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i (E_i - \mathbb{E}[D])^2}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \tag{7.7.3}$$

Al sustituir los valores de los meses correspondientes en las Ecuación 7.7.2 y Ecuación 7.7.3, se obtienen los siguientes resultados para cada temporada:

- **Temporada de Calor (Abr, May, Jun, Jul):** Acumula un total de 25 cortes y 74.58 horas de interrupción, arrojando una duración media alta de $\mathbb{E}[D] = 2.983$ horas y una varianza considerable de $\mathbb{V}[D] = 2.651$, esto se debe a las anomalías de colapso de red registradas durante las olas de calor primaverales.
- **Temporada de Lluvias (Ago, Sep, Oct):** Acumula 21 cortes pero únicamente 35.45 horas de interrupción. Esto nos da una media notablemente más baja de $\mathbb{E}[D] = 1.688$ horas y una varianza muy estable de $\mathbb{V}[D] = 0.343$, indicando que las fallas por lluvia son frecuentes pero suelen ser restablecidas con rapidez.
- **Estabilidad Invernal (Ene, Feb, Mar, Nov, Dic):** Acumula 18 cortes y 42.92 horas de interrupción. Su duración media es de $\mathbb{E}[D] = 2.384$ horas con una varianza alta de $\mathbb{V}[D] = 2.667$, provocada por mantenimientos atípicos observados en los bordes del año (especialmente en enero y diciembre).

7.7.3. Transformación Algebraica a Parámetros Log-Normales

Una vez conocidas las medias ($\mathbb{E}[D]$) y varianzas ($\mathbb{V}[D]$), estas deben transformarse hacia los parámetros μ y σ que conforman la función de distribución Log-normal.

La teoría de la probabilidad nos dice que la esperanza y la varianza de una variable con distribución Log-normal dependen de sus parámetros a través del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbb{E}[D] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\mathbb{V}[D] = \left[\exp(\sigma^2) - 1\right] \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, la varianza puede reescribirse como $\mathbb{V}[D] = (\mathbb{E}[D])^2 \left[\exp(\sigma^2) - 1\right]$. A partir de esta simplificación, se despeja el sistema para obtener las fórmulas inversas de calibración:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}[D]}{(\mathbb{E}[D])^2}\right)} \tag{7.7.4}$$

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[D]) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln\left(\frac{(\mathbb{E}[D])^2}{\sqrt{\mathbb{V}[D] + (\mathbb{E}[D])^2}}\right) \tag{7.7.5}$$

Al sustituir las medias y varianzas empíricas de cada temporada en las ecuaciones anteriores, obtenemos los parámetros exactos de la distribución Log-normal que modelará la duración de las fallas eléctricas en cada temporada:

Tabla 7.6.: Parámetros finales de la distribución Log-normal por temporada climática.

Temporada Climática	Meses que integran lo Integran	Media Ponderada $\mathbb{E}[D]$	Varianza Ponderada $\mathbb{V}[D]$	Parámetro μ	Parámetro σ
Estabilidad (Invierno)	Ene, Feb, Mar, Nov, Dic	2.384	2.667	0.6766	0.6202
Calor (Estiaje y Canícula)	Abr, May, Jun, Jul	2.983	2.651	0.9627	0.5106
Lluvias (Tormentas)	Ago, Sep, Oct	1.688	0.343	0.4668	0.3372

7.7.4. Visualización de las Densidades de Probabilidad (PDF)

Para comprender físicamente el comportamiento de los apagones en cada época del año, es fundamental analizar la Función de Densidad de Probabilidad (PDF, por sus siglas en

inglés) de las tres distribuciones calibradas anteriormente. Matemáticamente, la función de densidad para una variable aleatoria D con distribución Log-normal se define como:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{para } x > 0 \tag{7.7.6}$$

Donde x representa la duración del corte eléctrico en horas, y el área bajo la curva en un intervalo $[a, b]$ representa la probabilidad exacta de que un apagón dure entre a y b horas.

A continuación, se grafican las densidades de probabilidad para cada temporada climática, utilizando los parámetros μ y σ deducidos en la Tabla 7.6. Para facilitar la comparación visual del riesgo, todas las gráficas se evalúan en una ventana de observación de 0 a 12 horas.

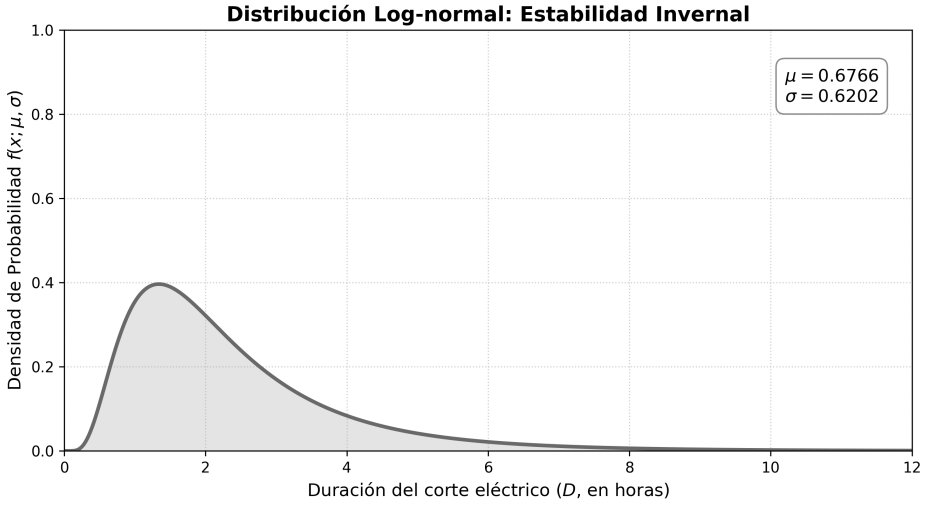


Figura 7.2.: Función de densidad de probabilidad Log-normal para la Temporada de Estabilidad (Invierno). Su distribución muestra una dispersión considerable ($\sigma = 0.6202$), lo que refleja una mezcla de cortes breves y mantenimientos atípicos prolongados.

7.8. Planteamiento del Modelo

En la literatura de ingeniería térmica y control automático, la evolución de la temperatura dentro de una cámara frigorífica suele modelarse mediante Ecuaciones Diferenciales Estocásticas de "caja gris" (*Grey-box SDEs*). Al formular el balance termodinámico del gabinete a partir de la ley de enfriamiento de Newton (Vollmer 2009) e incorporar un término de difusión continua para absorber las fluctuaciones térmicas no medidas, se

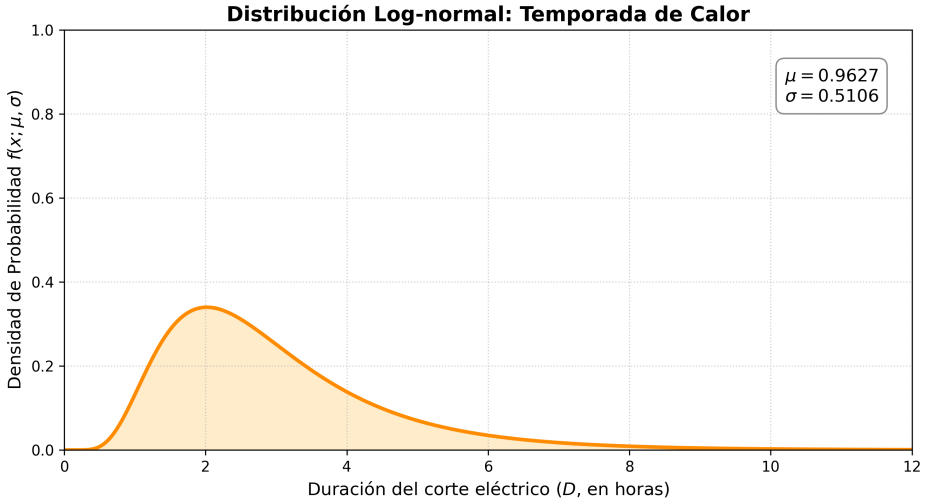


Figura 7.3.: Función de densidad de probabilidad Log-normal para la Temporada de Calor. Presenta el mayor desplazamiento hacia la derecha ($\mu = 0.9627$) y una "cola pesada", advirtiendo que los cortes por saturación térmica de transformadores tienen una alta probabilidad de prolongarse por varias horas, representando el mayor peligro para la red de frío.

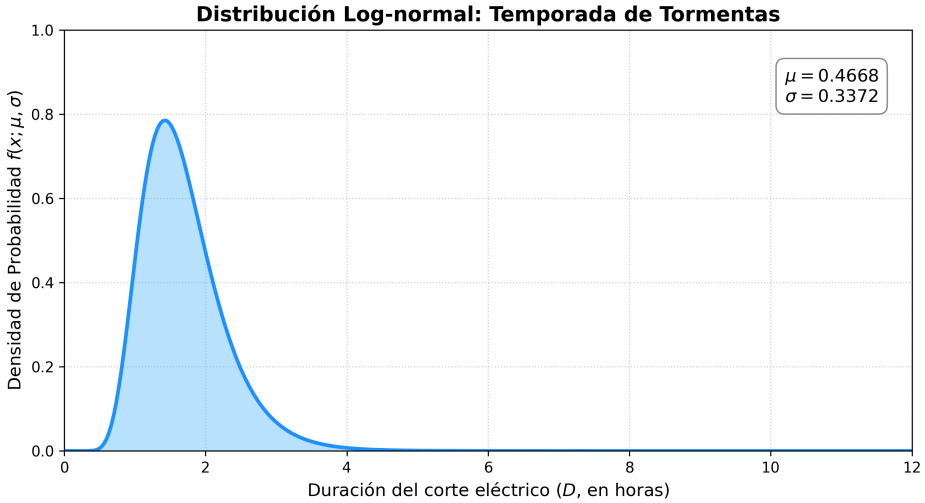


Figura 7.4.: Función de densidad de probabilidad Log-normal para la Temporada de Tormentas (Lluvias). Exhibe un pico muy pronunciado al inicio y una cola corta ($\sigma = 0.3371$), lo que indica que, aunque los cortes por lluvia son frecuentes, la CFE logra restablecer el servicio rápidamente en la gran mayoría de los casos.

obtiene de manera natural el proceso clásico de Ornstein-Uhlenbeck (Definición 4.20; Ecuación 4.5.3) (Karlin y Taylor 1998; Arnold 1974). Este enfoque continuo ha sido validado exitosamente para la identificación y el control predictivo de unidades de refrigeración domésticas y comerciales en trabajos como el de (Costanzo et al. 2013).

Sin embargo, para caracterizar el riesgo operativo de la cadena de frío en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, una difusión continua clásica resulta insuficiente. Si bien el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (Ecuación 4.5.3) describe con precisión la fuerza de reversión lineal hacia la temperatura del termostato y el ruido térmico interno mediante el movimiento Browniano estándar $W(t)$ (Definición 4.7), la continuidad de sus trayectorias impide representar dos fenómenos físicos que dominan la operación real de una clínica de vacunación (Capítulo 6): los cambios estructurales abruptos en el régimen de transferencia de calor cuando se interrumpe la energía eléctrica y las inyecciones instantáneas de aire caliente cada vez que se abre la puerta del refrigerador.

Por este motivo, en la presente investigación se extiende la ecuación diferencial estocástica de Ornstein-Uhlenbeck hacia la arquitectura de una **Ecuación Diferencial Estocástica Híbrida con Cambios de Régimen de Markov y Saltos de Poisson** (Definición 4.22), acoplando dos mecanismos estocásticos adicionales:

1. **Cambio de Régimen de Markov (*regime-switching*):** El estado del suministro eléctrico se modela mediante una cadena de Markov a tiempo continuo $\{\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ (Definición 4.11) con espacio de estados $\mathcal{M} = \{1, 2\}$, cuyas transiciones están determinadas por el Proceso de Poisson No Homogéneo de fallas de la CFE $\lambda(t)$ calibrado en la Sección 7.5 (Ecuación 7.5.2) y las duraciones Log-Normales estacionales de la Sección 7.7 (Tabla 7.6). Este cambio de régimen actúa como un interruptor físico en la ecuación diferencial estocástica: cuando ocurren fallas en la red eléctrica, el sistema pasa de un régimen de convección forzada impulsado por el compresor ($\alpha(t) = 1$, enfriamiento activo) hacia un régimen de convección natural pasiva ($\alpha(t) = 2$, calentamiento inercial), donde la temperatura ambiente exterior $T_{amb}(t)$ pasa a ser el nuevo atractor térmico del sistema.
2. **Perturbaciones discretas mediante un Proceso de Poisson Compuesto:** Para capturar la interacción del personal médico durante la jornada laboral, se incorpora un proceso de Poisson compuesto $J(t) = \sum_{i=1}^{N_{puerta}(t)} \gamma_i$ Definición 4.10. En esta formulación, $\{N_{puerta}(t)\}_{t\geq 0}$ es un Proceso de Poisson No Homogéneo (Definición 4.9) que contabiliza las aperturas de la puerta del equipo por parte del personal médico de forma independiente al movimiento Browniano $W(t)$, mientras que las variables aleatorias $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cuantifican la magnitud de cada choque térmico. Añadir el diferencial $dJ(t)$ a la dinámica continua permite modelar cómo el ingreso repentino de calor exterior desplaza instantáneamente la temperatura interna (como se ilustró en la Figura 4.3) antes de que la acción del termostato logre restablecer el equilibrio.

7.9. Calibración de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

Retomando la formulación teórica del modelo termodinámico híbrido (Ecuación 4.9.1) cuya existencia, unicidad de la solución fuerte y acotamiento en segundo momento quedaron demostrados mediante el Teorema 4.9 y Sección 4.10, procedemos a expresar la ecuación diferencial estocástica en su forma operativa sobre un horizonte anual $[0, T]$:

$$dT(t) = \begin{cases} \kappa_{on}(\theta_{set} - T(t))dt + \sigma_{on}dW(t) + dJ(t) & \text{si } \alpha(t) = 1 \text{ (Con energía)} \\ \kappa_{off}(T_{amb}(t) - T(t))dt + \sigma_{off}dW(t) & \text{si } \alpha(t) = 2 \text{ (Corte de luz)} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{7.9.1}$$

Como se observa en el segundo régimen ($\alpha(t) = 2$) de la Ecuación 7.9.1, el término de saltos discretos $dJ(t)$ se anula durante un corte de suministro eléctrico. Esto responde a los protocolos normativos de operación en las clínicas de salud (Organización Mundial de la Salud 2015): ante un apagón, el personal médico tiene prohibido abrir el refrigerador con el fin de preservar la inercia térmica de los paquetes fríos y botellas de agua, haciendo que la evolución térmica dependa exclusivamente de la transferencia pasiva de calor hacia el ambiente exterior.

Vinculando los elementos de la Ecuación 7.9.1 con las definiciones matemáticas del marco teórico, cada componente del sistema representa física y matemáticamente lo siguiente:

- $T(t)$**:** El proceso estocástico continuo por la derecha con límites por la izquierda (*càdlàg*, Definición 4.4) que describe la temperatura interna del refrigerador en el instante t (°C).
- $\alpha(t) \in \{1, 2\}$**:** El estado de la cadena de Markov a tiempo continuo (Definición 4.11) que indica la presencia ($\alpha(t) = 1$) o ausencia ($\alpha(t) = 2$) de suministro eléctrico en la unidad médica.
- θ_{set}**:** El nivel de equilibrio termostático o temperatura de consigna configurada en el equipo (°C).
- $T_{amb}(t)$**:** La función determinista continua y acotada que describe la temperatura ambiente exterior en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez (°C).
- κ_{on}**:** La tasa de reversión a la media o velocidad de enfriamiento activo (hr^{-1}), determinada por la potencia de abatimiento térmico del compresor cuando hay energía eléctrica.
- κ_{off}**:** La tasa de pérdida térmica pasiva hacia el exterior durante un apagón (hr^{-1}), determinada por el coeficiente global de aislamiento y el revestimiento térmico del gabinete.
- σ_{on}**:** El coeficiente de difusión o volatilidad térmica activa ($^{\circ}\text{C} \cdot \text{hr}^{-1/2}$), originado por los ciclos del compresor y la turbulencia del aire interno cuando los ventiladores operan en convección forzada.

- σ_{off}**:** El coeficiente de difusión o volatilidad térmica pasiva ($^{\circ}\text{C} \cdot \text{hr}^{-1/2}$) durante un corte eléctrico, cuando el aire interno transita a un estado de convección natural estática.
- $dW(t)$**:** El incremento infinitesimal del movimiento Browniano estándar (Definición 4.7), el cual modela las fluctuaciones térmicas continuas con media nula y varianza dt.
- $dJ(t)$**:** El incremento infinitesimal del Proceso de Poisson Compuesto (Definición 4.10) que introduce las discontinuidades de calor al sistema durante el horario laboral.
- $N_{puerta}(t)$**:** El Proceso de Poisson No Homogéneo (Definición 4.9) que contabiliza el número de aperturas de puerta realizadas por el personal clínico hasta el tiempo t.
- γ_i**:** La variable aleatoria que cuantifica la magnitud del salto térmico instantáneo ($^{\circ}$C) provocado por la infiltración de aire cálido en la i-ésima apertura de puerta.

Para garantizar el rigor físico de la simulación, los coeficientes termodinámicos se dedujeron a partir de las especificaciones técnicas del refrigerador institucional **Haier HBC-150**. De acuerdo con el catálogo oficial *Performance, Quality and Safety* (PQS) de la Organización Mundial de la Salud (OMS) (Organización Mundial de la Salud 2024, 89-90), este equipo cuenta con certificación de protección Grado A y está diseñado específicamente para preservar la red de frío en zonas con condiciones climáticas severas.

Con el propósito de aproximar de manera precisa el comportamiento de este equipo bajo los rigurosos estándares operativos de la OMS, cada coeficiente de la Ecuación 7.9.1 se calculó a partir de las leyes físicas de transferencia de calor y la mecánica de fluidos.

A continuación, se detalla el cálculo de cada parámetro de la Ecuación 7.9.1 basándose en las pruebas estandarizadas de este equipo.

7.9.1. Régimen 1: Operación Normal ($\alpha(t) = 1$)

Este estado ocurre cuando hay suministro eléctrico. El compresor y los ventiladores del equipo funcionan activamente para llevar y mantener la temperatura interna hacia su nivel ideal.

- **Temperatura de Consigna (θ_{set})**: Se establece en 5°**C**. Esta elección no es arbitraria; representa exactamente el punto medio del rango normativo de seguridad de la OMS (2°C a 8°C). Al centrar el termostato en 5°C, el modelo adquiere un margen simétrico de seguridad de 3°C hacia arriba (evitando la degradación por calor) y 3°C hacia abajo (evitando la destrucción de la vacuna por congelamiento).
- **Velocidad de Enfriamiento (κ_{on})**: Este parámetro mide la rapidez con la que el motor abate el calor. Sus unidades son hr^{-1} (tasas de cambio por hora). Para calcularlo, recurrimos a la Ley de Enfriamiento de Newton (Vollmer 2009), la cual establece que la temperatura en el tiempo t sigue una trayectoria exponencial: $T(t) = \theta_{set} + (T_0 - \theta_{set})e^{-\kappa t}$. El protocolo de la OMS dicta un *Pull-down time*



Figura 7.5.: Refrigerador institucional para vacunas Haier HBC-150. Este equipo tipo cofre cuenta con certificación PQS de la OMS y masa térmica incorporada para mantener la red de frío estable durante fallas prolongadas del suministro eléctrico.

(tiempo de abatimiento) de 22 horas para que el equipo logre bajar desde un calor ambiental extremo de 43°C hasta entrar a la zona segura de 8°C. Sustituyendo estos valores y nuestro objetivo de 5°C, obtenemos:

$$8 = 5 + (43 - 5)e^{-\kappa_{on}(22)}$$

Al despejar la ecuación $\left(\ln\left(\frac{3}{38}\right) = -22\kappa_{on}\right)$, el resultado es $\kappa_{on} \approx 0.1154$ **hr**$^{-1}$.

- **Volatilidad y Ruido del Compresor (σ_{on})**: El motor del refrigerador no enfría de manera perfecta; se enciende y se apaga constantemente, generando turbulencias. Dado que la solución analítica de un Proceso de Ornstein-Uhlenbeck sigue una distribución Normal (Ecuación 4.5.6), podemos usar la "regla empírica" de la estadística para acotar este ruido. Para asegurar con un 99.7 % de confianza que estas fluctuaciones naturales no rompan nuestro margen de seguridad de ± 3°C, requerimos que tres desviaciones estándar abarquen exactamente esos tres grados ($3 \times SD = 3$°C), lo que implica una desviación estándar de $SD = 1$°C.

  La varianza de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck clásico depende del tiempo t (Ecuación 4.5.5). Sin embargo, dado que el refrigerador opera de manera continua durante bastante tiempo, la inercia inicial se desvanece y el sistema alcanza un estado estacionario (el límite cuando $t \to \infty$). Sustituyendo en la fórmula asintótica de la desviación estándar $\left(SD = \frac{\sigma_{on}}{\sqrt{2\kappa_{on}}}\right)$:

$$1 = \frac{\sigma_{on}}{\sqrt{2(0.1154)}} \implies \sigma_{on} = \sqrt{0.2308} \approx 0.4804$$

7.9.2. Régimen 2: Falla Eléctrica ($\alpha(t) = 2$)

Este estado se activa cuando el Proceso de Poisson registra un apagón. El motor se detiene, y la dinámica del sistema pasa a depender exclusivamente del aislamiento térmico del refrigerador frente al clima exterior.

- **Temperatura Exterior ($T_{amb}(t)$)**: La temperatura ambiente actúa como el atractor del sistema. Dado que en Tuxtla Gutiérrez el calor oscila drásticamente a lo largo del día, esta variable se modela computacionalmente como una función senoidal que alcanza su pico máximo a las 15:00 hrs. Para nuestra calibración analítica del peor escenario (estiaje), evaluamos este atractor en un máximo absoluto de 43°**C**. En este escenario, el término $(T_{amb} - T(t))$ se vuelve enorme y genera un calentamiento fuertemente acelerado.
- **Velocidad de Pérdida Térmica (κ_{off})**: Representa la lentitud con la que el calor exterior logra penetrar el equipo. Se mide en hr^{-1}. En el manual de la OMS (Organización Mundial de la Salud 2024, 89-90), el equipo Haier HBC-150 reporta un *Hold-over time* (tiempo de autonomía) de 60 horas con 50 minutos (60.833 horas). Físicamente, esto significa que gracias a la enorme masa de hielo y agua en

su interior, el equipo puede resistir rodeado de un calor de 43°C durante casi 61 horas antes de que su temperatura suba desde los 5°C ideales hasta el umbral de fallo normativo (10°C en las pruebas de autonomía de la OMS). Usando nuevamente la Ley de Enfriamiento de Newton (Vollmer 2009) hacia el atractor externo:

$$10 = 43 + (5 - 43)e^{-\kappa_{off}(60.833)}$$

Al despejar la ecuación $\left(\ln\left(\frac{33}{38}\right) = -60.833\kappa_{off}\right)$, el resultado es $\kappa_{off} \approx 0.00232\ \mathbf{hr}^{-1}$.

La enorme diferencia de magnitud entre κ_{on} (rápido) y κ_{off} (muy lento) comprueba matemáticamente la alta efectividad térmica de los paquetes refrigerantes.

- **Volatilidad Externa (σ_{off})**: Al cortarse la electricidad y apagarse los ventiladores, el aire interior deja de mezclarse a la fuerza (convección forzada) y pasa a un estado de reposo (convección natural estática). Según la mecánica de fluidos, esta ausencia de turbulencia reduce las variaciones aleatorias en un orden de magnitud. Por ello, la volatilidad térmica sin energía se calcula como la décima parte de la volatilidad activa: $\sigma_{off} = \frac{\sigma_{on}}{10} \approx \frac{0.4804}{10} \approx 0.048$.

7.9.3. Perturbaciones Discretas: Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$)

De acuerdo con las normativas internacionales de manejo de la red de frío, la manipulación de los equipos de refrigeración debe limitarse estrictamente a los días hábiles (de lunes a viernes). Durante estas jornadas, el refrigerador debe abrirse idealmente un máximo de dos veces: una apertura rutinaria matutina (típicamente a las 8:00 hrs) para extraer los biológicos necesarios para el turno, y una apertura vespertina destinada a resguardar los sobrantes. Por el contrario, durante los fines de semana y días festivos, la unidad debe permanecer completamente sellada para maximizar la preservación de la inercia térmica, anulando por completo la inyección de calor exterior generada por el personal médico.

Dado que la apertura de las 8:00 hrs es un evento operativo determinista y predecible, la aleatoriedad del sistema recae en el resto de la jornada, condicionada por la variabilidad de la demanda clínica. Para aproximar el modelo matemático a la realidad, aislar el factor humano y evaluar la resiliencia termodinámica del equipo frente a fallas eléctricas, el Proceso de Poisson (Definición 4.8 ; Definición 4.9) se segmenta en tres escenarios de simulación. Cada escenario persigue un objetivo analítico particular, definiendo tasas de intensidad (λ) dependientes del tiempo:

- **Escenario A (Control Absoluto):** Diseñado como línea base para evaluar la eficiencia térmica pura del equipo, respondiendo a la pregunta de cuánto tiempo el refrigerador es capaz de mantener la cadena de frío sin intervención humana. Simula días de inactividad clínica, como fines de semana o días festivos, con lo cual la intensidad del proceso de Poisson es nula en todo momento ($\lambda = 0$). Las variaciones

de la temperatura interna dependen exclusivamente de los cortes eléctricos y la temperatura ambiente exterior.

- **Escenario B (Apego Normativo):** Su objetivo es establecer el margen de seguridad del equipo operando bajo un entorno clínico ideal. Respeta la única apertura extra permitida por la norma para resguardar biológicos sobrantes. Esta perturbación se modela como un Proceso de Poisson con una intensidad de 1 evento/día. Operativamente, esta tarea se realiza al final de la jornada de consulta. Al distribuir esta probabilidad en un horario vespertino de 2 horas (de 15:00 a 17:00 hrs), la intensidad local se calcula como:

$$\lambda_{tarde} = \frac{1 \text{ evento}}{2 \text{ horas}} = 0.5 \text{ eventos/hora}$$

  Fuera de este horario, la intensidad del proceso es estrictamente cero.
- **Escenario C (Estrés Operativo y Contingencia):** Busca cuantificar la vulnerabilidad del sistema ante situaciones de crisis, analizando cómo el exceso de aperturas agota el "colchón térmico" de la unidad dejándola indefensa si ocurre un apagón. Modela la saturación clínica donde la demanda sobrepasa la capacidad de los termos auxiliares de las enfermeras, obligando a realizar "viajes de resurtido" al refrigerador principal. Con base en los cercos epidemiológicos registrados en Chiapas durante 2025, el volumen de aplicación superó las 415,000 dosis mensuales, triplicando el consumo regular (aprox. 130,000 dosis). Al escalar operativamente este incremento, la necesidad de extracción matutina se triplica (1 apertura fija a las 8:00 hrs + 2 aperturas de resurtido). El retorno vespertino se mantiene normativo (1 apertura si es que sobran vacunas para resguardar nuevamente). Esto divide el proceso en dos ventanas activas:

  1. *Ventana Matutina (Resurtido):* Se esperan 2 eventos distribuidos de 09:00 a 14:00 hrs.

$$\lambda_{maana} = \frac{2 \text{ eventos}}{5 \text{ horas}} = 0.4 \text{ eventos/hora}$$

  2. *Ventana Vespertina (Sobrantes):* Se mantiene en 0.5 eventos/hora de 15:00 a 17:00 hrs.

  Fuera de estos horarios, la intensidad del proceso es estrictamente cero.

7.9.4. Impacto de la Apertura y Salto Térmico (γ_i)

Al tratarse de un equipo tipo cofre (*Icelined Refrigerator*), la pérdida térmica por convección forzada es físicamente menor que en equipos verticales, ya que el aire frío es más denso y tiende a permanecer en el fondo. Sin embargo, el ingreso de aire caliente es inevitable y su magnitud no es una constante; depende del tiempo que la puerta permanezca abierta y de la correcta disposición del balasto térmico (botellas de agua).

Para modelar rigurosamente este choque térmico, nos basamos en los estudios experimentales del *National Institute of Standards and Technology (NIST)* (Chojnacky et al. 2010). En sus pruebas de uso clínico, el NIST demostró que:

1. En el mejor escenario (aperturas rápidas con botellas de agua como barrera), el incremento de temperatura en la vacuna es mínimo, limitándose a $0.16°\mathbf{C}$.
2. En un escenario de descuido o falta de balasto térmico, el ingreso de calor genera un incremento adicional de 1.2°C, resultando en un choque máximo esperado de $1.36°\mathbf{C}$ $(0.16 + 1.2)$.

Dado que en la práctica clínica intervienen múltiples factores humanos aleatorios e independientes, el Teorema del Límite Central justifica modelar la magnitud del salto γ_i como una variable aleatoria con distribución Normal ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

La media esperada (μ) se calcula como el punto medio entre los límites operativos del NIST:

$$\mu = \frac{0.16 + 1.36}{2} = 0.76°\text{C}$$

Para determinar la varianza, aplicamos la regla empírica (regla de las tres sigmas), asumiendo que el 99.7 % de los eventos clínicos caerán dentro de los límites físicos observados. Igualando la distancia desde la media hasta el extremo superior con 3σ:

$$3\sigma = 1.36 - 0.76 = 0.60 \implies \sigma = 0.20°\text{C}$$

Restricción Termodinámica (Filtro de Truncamiento): Las colas de una distribución Normal estándar se extienden hasta menos infinito. En el contexto físico, un valor de $\gamma_i < 0$ implicaría que al abrir la puerta el refrigerador absorbe frío del exterior cálido, lo cual viola la Segunda Ley de la Termodinámica. Asimismo, el estudio del NIST establece que el ingreso mínimo absoluto de calor es de 0.16°C.

Para garantizar la viabilidad física del proceso estocástico durante las simulaciones de Monte Carlo, la variable aleatoria γ_i se define como una distribución truncada inferiormente, aplicando un filtro de maximización:

$$\gamma_i = \text{máx}(0.16, X) \quad \text{donde } X \sim \mathcal{N}(0.76, 0.20^2) \tag{7.9.2}$$

De esta forma, la Ecuación Diferencial Estocástica absorbe la variabilidad operativa del personal médico sin riesgo a arrojar perturbaciones termodinámicamente imposibles.

7.10. Cinética de Degradación Térmica (Ecuación de Arrhenius)

La Ecuación Diferencial Estocástica calibrada anteriormente permite simular la trayectoria térmica interna del refrigerador, $T(t)$. Para traducir estas variaciones térmicas en pérdida de viabilidad del biológico (particularmente en vacunas vivas atenuadas como Sarampión o Poliomielitis), retomamos el modelo cinético de primer orden (Ecuación 6.2.1) y la **Ecuación de Arrhenius** (Definición 6.1 y Ecuación 6.2.2) establecidos en la Sección 6.2:

$$k(T_K(t)) = A \exp\left(-\frac{E_a}{R \cdot T_K(t)}\right). \tag{7.10.1}$$

Para nuestro estudio de caso, los parámetros fisicoquímicos de la Ecuación 7.10.1 se calibran de la siguiente manera:

- $k(T_K(t))$: La constante de velocidad de degradación térmica en el instante t, expresada en s^{-1}.
- $T_K(t)$: La temperatura interna del fluido convertida a escala absoluta (grados Kelvin), calculada como $T(t) + 273.15$.
- R: La Constante Universal de los Gases, con un valor fijo de $8.314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$.
- E_a: La Energía de Activación, calibrada en $85,000\,\mathbf{J/mol}$ (85 kJ/mol). Representa la barrera energética mínima que las moléculas del antígeno deben superar para iniciar el proceso irreversible de ruptura estructural.
- A: El Factor Preexponencial (o factor de frecuencia), ajustado a un valor empírico de $1.2 \times 10^{13}\,\mathbf{s}^{-1}$. Este parámetro asegura que la tasa de degradación sea prácticamente nula cuando el equipo opera correctamente dentro de la red de frío (2°C a 8°C), pero que escale de forma severa ante una excursión térmica crítica.

7.10.1. Modelo de Daño Térmico Acumulado y Merma de Inventario

En la práctica clínica normativa, las variaciones térmicas que oscilan dentro del rango normativo (2°C a 8°C) se consideran tolerables y el daño logístico ocurre exclusivamente cuando se rompe la cadena de frío ($T(t) > 8$°C). Como se fundamentó en la Sección 6.2 y en la Sección 6.3, integrando la tasa cinética condicionada por la función indicadora $\mathbf{1}_{\{T(t)>8^\circ\mathrm{C}\}}$ se define el **Daño Acumulado (DA)** hasta el instante t como:

$$DA(t) = \int_0^t k(T_K(s)) \cdot \mathbf{1}_{\{T(s)>8^\circ\mathrm{C}\}}\, ds.$$

De acuerdo con la discretización temporal deducida en la Ecuación 6.2.3 junto con la Ecuación 6.3.1, para actualizar el estado del sistema en pasos discretos Δt dentro de la Simulación, el número de dosis destruidas (merma instantánea) en cada subintervalo se calcula multiplicando el inventario activo $I(t)$ por la fracción de biológico degradada ΔD_n:

$$\mathrm{Merma}(t_n) = I(t_n)\Delta D_n = I(t_n)\left(1 - \exp\left[-k(T_K(t_n))\Delta t\right]\right)\mathbf{1}_{\{T(t_n)>8^\circ\mathrm{C}\}}.$$

De esta forma, en cada iteración donde la temperatura rebasa los 8°C (tras superar el periodo de inercia térmica del vial), el algoritmo descuenta las dosis inutilizables por exposición al calor, activando los protocolos de reabastecimiento cuando el inventario cae por debajo del umbral crítico de operación.

7.10.2. Exclusión del Riesgo por Congelamiento ($T < 2^{\circ}$C)

Es importante destacar que el modelo de daño térmico propuesto se restringe exclusivamente a cuando la temperatura interna del equipo es mayor que 8°C ($T(t) > 8^{\circ}$C). Aunque el descenso de la temperatura por debajo de los 2°C (y especialmente hacia el punto de congelación a 0°C) representa un riesgo logístico crítico que destruye la viabilidad del biológico debido a la cristalización del agua, este fenómeno se excluye de la simulación por tres motivos teóricos y prácticos fundamentales:

1. **Incompatibilidad Cinética:** El daño por congelamiento obedece a un cambio de fase físico y estructural, no a una reacción química progresiva. Por lo tanto, la Ecuación de Arrhenius carece de validez termodinámica para modelar este deterioro continuo, imposibilitando su incorporación bajo la misma Ecuación Diferencial Ordinaria.
2. **Deriva Térmica del Entorno:** La estructura matemática de la Ecuación Diferencial Estocástica formulada no posee fuerzas de deriva que empujen el sistema hacia el sobreenfriamiento. Con suministro eléctrico, el equipo gravita hacia el termostato ($\theta_{set} = 5^{\circ}$C). Durante un apagón, la temperatura interna tiende hacia el ambiente cálido exterior ($T_{amb}(t) \geq 5^{\circ}$C), mientras que las perturbaciones por apertura de puertas ($dJ(t)$) únicamente inyectan energía térmica positiva.
3. **Arquitectura del Equipo:** La simulación asume un equipo tipo cofre precalificado (*Icelined Refrigerator*). El diseño de estas unidades incorpora un revestimiento estabilizador (balasto de agua/hielo) cuya función termodinámica es precisamente absorber los picos de frío directo del compresor, protegiendo al biológico de caídas accidentales de temperatura.

Por consiguiente, bajo las condiciones operativas y climáticas simuladas, la probabilidad de sobreenfriamiento se considera nula. El análisis de vulnerabilidad del inventario queda acotado al estrés por calor derivado de la interrupción del suministro eléctrico.

7.11. Dinámica de Inventario y Demanda Clínica

Para evaluar la capacidad de la red de frío, el modelo termodinámico debe interactuar con las variaciones operativas del inventario. La simulación incorpora parámetros logísticos basados en la teoría de gestión de inventarios y en el calendario de salud pública mexicano.

7.11.1. Capacidad Logística y Reglas de Reabastecimiento

El modelo asume el uso de un equipo precalificado tipo cofre (*Icelined Refrigerator*), específicamente el modelo Haier HBC-150. Con un volumen útil de almacenamiento de aproximadamente 122 litros, la capacidad máxima del sistema se establece en $5,000$ dosis.

Esta cifra contempla el volumen físico de los empaques secundarios y el espacio necesario para garantizar la correcta convección del aire interno.

Para gestionar el riesgo de desabasto provocado por la merma térmica, se define un **Punto de Reorden** de $1,000$ dosis. Este valor representa un *stock* de seguridad estratégico del $20\,\%$, el cual garantiza un colchón operativo para que la clínica continúe sus labores de inmunización mientras se activa el protocolo de reabastecimiento jurisdiccional.

7.11.2. Comportamiento Estacional de la Demanda

Ante la variabilidad de las aplicaciones diarias, el consumo se modela mediante una demanda sintética representativa, calibrada para reflejar la afluencia de un Centro de Salud Urbano de primer nivel. Esta demanda base no es constante, sino que obedece al comportamiento estacional del sistema de salud en México, tal como se detalla en la siguiente tabla:

Tabla 7.7.: Demanda base diaria de vacunas por mes, ajustada a la estacionalidad epidemiológica y a las campañas nacionales de salud pública en México.

Mes	Demanda Base Diaria (Dosis)	Justificación Epidemiológica
Enero	65	Consumo regular de esquema básico.
Febrero	110	1ª Jornada Nacional de Salud Pública.
Marzo	87	Regulación post-campaña.
Abril	65	Consumo regular de esquema básico.
Mayo	110	2ª Jornada Nacional de Salud Pública.
Junio - Agosto	65	Periodo de consumo valle (vacaciones/lluvias).
Septiembre	76	Transición a temporada otoñal.
Octubre	163	Inicio de campaña invernal (Influenza/Neumococo).
Noviembre	130	Continuación de campaña invernal.
Diciembre	87	Desaceleración por periodo vacacional de invierno.

7.11.3. Acoplamiento Estocástico Termodinámico-Logístico

La innovación principal de este bloque logístico radica en la dependencia entre el estrés térmico y el estrés de inventario. La demanda diaria real en el modelo, $D(t)$, no es un escalar estático, sino una variable aleatoria que se acopla dinámicamente a las perturbaciones del proceso de Poisson $N_{puerta}(t)$ calibrado en la sección anterior.

La regla de consumo se define a partir de los tres escenarios de simulación:

1. **Escenario A (Control Absoluto):** Al simular días de inactividad clínica (fines de semana o días festivos), el personal no abre el equipo ($\lambda = 0$). Consecuentemente, no hay extracción de biológicos:

$$D_A(t) = 0$$

2. **Escenario B (Apego Normativo):** Simula una jornada clínica estándar con una única apertura matutina de extracción. El consumo diario es exactamente igual a la demanda base dictada por el mes correspondiente:

$$D_B(t) = D_{base}$$

3. **Escenario C (Estrés Operativo):** Durante contingencias o cercos epidemiológicos, la demanda sobrepasa la capacidad de los termos auxiliares, forzando viajes de resurtido al equipo principal. Dado que el proceso general $N_{puerta}(t)$ engloba todas las aperturas del día, definimos a $N_{resurtido}(t)$ como el subconjunto de eventos ocurridos exclusivamente durante la ventana de máxima afluencia matutina (09:00 a 14:00 hrs).

   Matemáticamente, por cada evento de resurtido generado, se extrae un bloque adicional de vacunas equivalente a la demanda base. Así, la demanda diaria total se convierte en una variable aleatoria dependiente del proceso de Poisson, definida por:

$$D_C(t) = D_{base} + (N_{resurtido}(t) \times D_{base})$$

Este acoplamiento garantiza que las trayectorias en la Simulación de Monte Carlo con mayor cantidad de aperturas de puerta y por ende, mayor ingreso de calor y daño térmico correspondan exactamente a los días con mayor rotación de inventario, reflejando con precisión la saturación logística de una crisis sanitaria.

Parte III.

Simulación del Equipo (Haier HBC-150)

8. Simulación Computacional y Análisis de Resultados

Para evaluar la confiabilidad de la red de frío frente a la volatilidad del suministro eléctrico y las condiciones climáticas de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, desarrollamos una simulación en Python enfocado en el equipo institucional Haier HBC-150 presentado en la sección anterior. Debido a la interacción simultánea de múltiples procesos aleatorios (cortes de energía, aperturas de puerta, inercia térmica y consumo logístico), el sistema propuesto no posee una solución analítica cerrada. En consecuencia, recurrimos a los esquemas numéricos para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y al método de Monte Carlo.

A diferencia de modelos estáticos tradicionales, esta investigación evalúa el riesgo bajo tres contextos operativos distintos para medir el impacto de la interacción humana:

- **Escenario A (Línea Base):** Control absoluto sin interacción operativa. Aísla el riesgo provocado exclusivamente por el clima exterior y las fallas de la red eléctrica.
- **Escenario B (Apego Normativo):** Consumo y aperturas bajo los lineamientos estándar recomendados.
- **Escenario C (Contingencia):** Estrés operativo severo, modelando alta rotación del inventario y resurtidos aleatorios mediante procesos de Poisson.

  Nota sobre Reproducibilidad: Con el fin de mantener este documento con un formato limpio y legible, hemos omitido el código fuente de programación en el texto. Los algoritmos completos para cada escenario se encuentran documentados detalladamente en el repositorio público de GitHub de este proyecto (Pérez, C. 2026a, 2026b, 2026c).

A continuación, explicamos la metodología de la simulación, la estructuración del código y los supuestos físicos considerados (como la inercia térmica del biológico). Posteriormente, presentamos el análisis estadístico y la discusión de los resultados obtenidos para cada escenario.

8.1. Malla Temporal y Clima Exterior

El primer módulo de la simulación establece el tiempo y el clima de Tuxtla Gutiérrez. Creamos una malla de tiempo para cubrir un año bisiesto completo de 366 días. Para

capturar los cambios rápidos en la temperatura interna del refrigerador, elegimos un paso de integración discreto de exactamente 5 minutos ($\Delta t = 5/60$ horas). Esto genera un total de 105408 iteraciones por cada año simulado.

Para sincronizar el modelo con la logística institucional, programamos un calendario interno que identifica los días hábiles (lunes a viernes) y excluye tanto los fines de semana (sábados y domingos) como los días festivos oficiales. De esta manera, garantizamos que la extracción operativa de vacunas ocurra exclusivamente durante las jornadas laborales reales.

En cuanto al entorno climático, cargamos una base de datos meteorológica real de la ciudad. Sin embargo, los registros públicos solo proveen la temperatura promedio diaria (T_{media}), lo cual oculta el verdadero estrés térmico que ocurre a lo largo del día. Para solucionar esto, expandimos el dato diario a nuestra escala de 5 minutos utilizando una función senoidal. Calibramos esta función con una amplitud de **7°C**, lo que equivale a una variación típica de **14°C** entre el frío de la madrugada y el calor máximo de la tarde de Tuxtla Gutiérrez. Además, ajustamos la ecuación para forzar que el pico máximo de la temperatura golpee exactamente a las 15:00 horas de cada día simulado:

$$T_{amb}(t) = T_{media}(t) + 7.0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t - 15}{24}\right)$$

Donde t representa el tiempo en horas, es decir, $t \in [0, 8784)$ para un año completo de 366 días.

El resultado de esta oscilación se observa en la Figura 8.1, que muestra el comportamiento térmico para todo el año, y en la Figura 8.2, que demuestra la consistencia del ciclo diurno. Es importante destacar que, dado que el clima de la ciudad es un factor independiente, estas condiciones ambientales y gráficas aplican de manera idéntica para los tres escenarios evaluados (A, B y C).

8.2. Parametrización Física, Cinética y Estocástica

Una vez construido el entorno climático, inicializamos las constantes que controlan la termodinámica del equipo institucional Haier HBC-150 y las propiedades fisicoquímicas de las vacunas.

8.2.1. Parámetros Termodinámicos y Biológicos

Asignamos los coeficientes térmicos estimados para la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) de Orstein Uhlenbeck. Alineados a las normativas vigentes, el termostato y la temperatura inicial del equipo se establecen en $\theta = 5.0°\text{C}$ y $T_0 = 5.0°\text{C}$. Cuando el equipo tiene suministro eléctrico, la tasa de abatimiento térmico es de $\kappa_{on} = 0.1154\,\text{hr}^{-1}$,

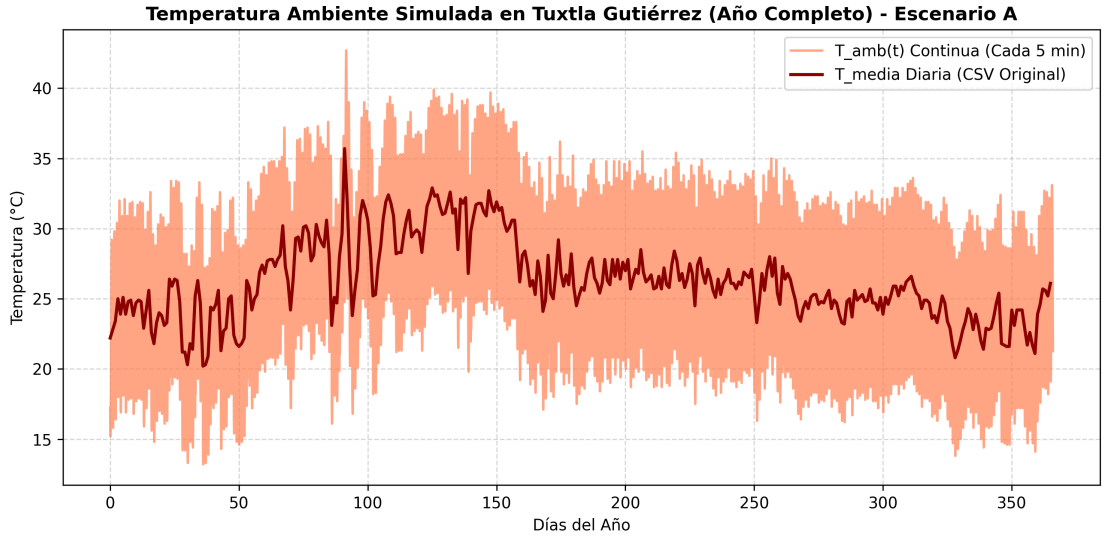


Figura 8.1.: Temperatura ambiente continua simulada para Tuxtla Gutiérrez a lo largo de un año, comparada con los promedios diarios de la base meteorológica.

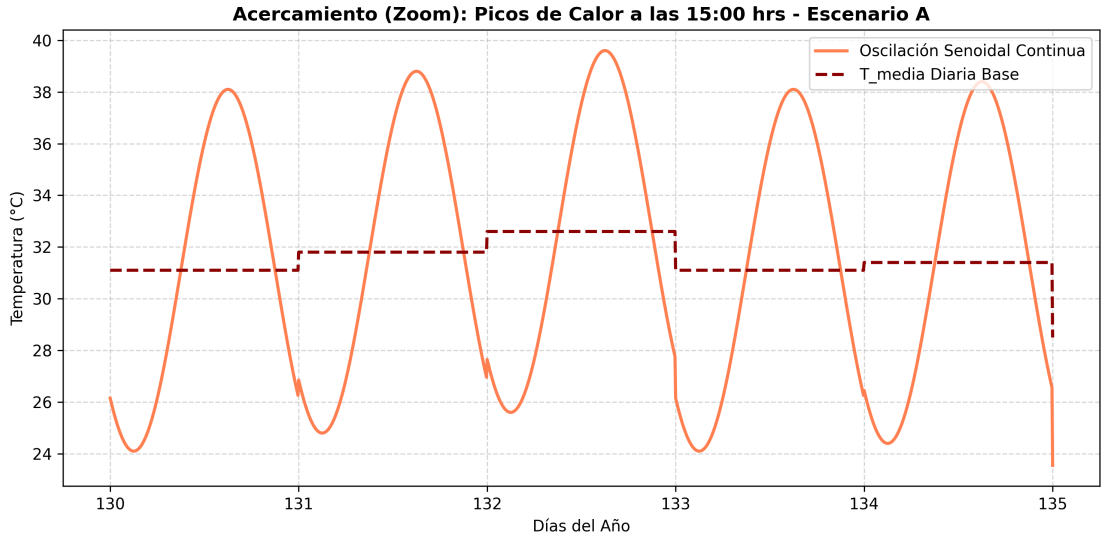


Figura 8.2.: Acercamiento a un periodo de 5 días de simulación climática (Mayo), donde se observa el ciclo senoidal y los picos térmicos a las 15:00 horas.

con una volatilidad interna debido a los ventiladores de $\sigma_{on} = 0.4804$, calculados en la Sección 7.9.1.

Ante una falla eléctrica, el compresor se apaga. El aislamiento de alta densidad del equipo frena la transferencia de calor exterior con una inercia pasiva de $\kappa_{off} = 0.00232\,\mathrm{hr}^{-1}$ y un ruido por microfiltraciones de $\sigma_{off} = 0.048$, estimado en la Sección 7.9.2.

Para modelar la degradación biológica, utilizamos la ecuación de Arrhenius (Ecuación 7.10.1) calibrada para un biológico termosensible representativo. La energía de activación se fija en $E_a = 85,000\,\mathrm{J/mol}$, la constante de los gases en $R = 8.314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$ y el factor preexponencial en $A = 1.2 \times 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$ (obtenidos en la Sección 7.10). Adicionalmente, fundamentados en la termodinámica de fluidos, introducimos un **filtro de inercia térmica de 30 minutos**; es decir, asumimos que el biológico líquido dentro del frasco de vidrio tarda este periodo en igualar la temperatura interna del equipo, evitando contabilizar falsos daños por picos térmicos breves.

8.2.2. Apertura de Puertas ($N_{puerta}(t)$)

La interacción humana se modela extrayendo vacunas únicamente durante las jornadas laborales (lunes a viernes). Para evaluar el impacto logístico, la simulación adapta estas perturbaciones dependiendo del contexto operativo (como se vio en la Sección 7.9.3), los tres escenarios de prueba se definen de la siguiente manera:

- **Escenario A (Línea Base):** No existe interacción humana; la tasa de aperturas es estrictamente cero durante todo el año.
- **Escenario B (Apego Normativo):** Se programa una apertura determinista a las 8:00 AM para la extracción de dosis diarias. Posteriormente, se activa un proceso de Poisson con intensidad $\lambda_{tarde} = 0.5$ eventos/hora$ en un horario vespertino de 2 horas (de 15:00 a 17:00 hrs) para las aperturas aleatorias vespertinas de resguardo.
- **Escenario C (Contingencia):** Además de la extracción matutina y vespertina del Escenario B, se usa otro proceso de Poisson de alta frecuencia ($\lambda_{resurtido} = 0.4$ eventos/hora) en un horario matutino de 5 horas (de 09:00 a 14:00 hrs) para simular viajes masivos de abastecimiento debido a la saturación del inventario.

Como se analizó en la Sección 7.9.4, cada apertura inyecta aire caliente al interior del equipo. Este impacto se calcula mediante un salto térmico aleatorio γ_i, extraído de una distribución Normal truncada (Ecuación 7.9.2) para reflejar la variabilidad real en el tiempo que la puerta permanece abierta.

8.2.3. Riesgo Eléctrico de la CFE

El riesgo del suministro eléctrico se parametriza utilizando el comportamiento histórico de la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Retomando los cálculos de la Sección 7.5, programamos la tasa de fallas diarias $\lambda_{cfe}(t)$ para el Proceso de Poisson No Homogéneo.

Este modelo promedia un aproximado de 64 cortes anuales, combinando un riesgo base constante con dos campanas estacionales que simulan el sobrecalentamiento de transformadores en primavera y la temporada de tormentas en verano:

$$\lambda_{cfe}(t) = 0.0667 + 0.2314 \cdot \exp\left(-\frac{(t-152)^2}{4050}\right) + 0.2048 \cdot \exp\left(-\frac{(t-244)^2}{1800}\right)$$

Para la duración de estos cortes, utilizamos una distribución Log-Normal calibrada por el método de los momentos en la Sección 7.7 para las distintas épocas del año:

- **Temporada Base:** $\mu = 0.6766,\ \sigma = 0.6202$
- **Temporada de Calor:** $\mu = 0.9627,\ \sigma = 0.5106$
- **Temporada de Lluvias:** $\mu = 0.4668,\ \sigma = 0.3372$

8.3. Precalibración de Eventos Externos

Antes de resolver numéricamente la ecuación diferencial estocástica para la temperatura interna del equipo, primero se simulan las trayectorias discretas de las perturbaciones externas que actúan sobre el equipo a lo largo de la malla temporal $t_n = n\Delta t,\ n = 0, 1, \dots, N$, con $\Delta t = 5/60$ horas y $N = 105,408$ pasos para cubrir las $T_{max} = 8784$ horas del año.

Siguiendo el esquema de discretización para cadenas de Markov a tiempo continuo (Sección 5.5), el algoritmo recorre secuencialmente los 366 días del año evaluando la intensidad estacional $\lambda_{cfe}(t)$ para determinar el número de fallas eléctricas diarias mediante el proceso de Poisson. Cuando ocurre un evento (apagón), se asigna su hora de inicio de manera uniforme en el día y se calcula su duración a partir de la distribución Log-Normal correspondiente a la estación climática Tabla 7.6. Con ello se construye el vector de estado eléctrico discreto $S_n = S(t_n) \in \{0, 1\}$, el cual toma el valor $S_n = 1$ cuando hay suministro eléctrico (régimen $\alpha_n = 1$) y $S_n = 0$ durante un corte de energía (régimen $\alpha_n = 2$).

De forma análoga, la ocurrencia de aperturas de puerta se discretiza sobre los nodos t_n de acuerdo con el esquema regular para procesos de Poisson compuestos (Sección 5.6), generando en cada subintervalo $[t_n, t_{n+1})$ el conteo de eventos $\Delta N_n \sim \text{Poisson}(\lambda_{puerta}(t_n)\Delta t)$ según la función de intensidad $\lambda_{puerta}(t)$ definida para cada escenario operativo Sección 7.9.3.

Posteriormente, el algoritmo aplica una regla estricta de control operativo: multiplica los eventos de apertura por el estado eléctrico S_n. Esto garantiza que, si la clínica se encuentra bajo un corte de suministro eléctrico ($S_n = 0$), el término de salto se anule por completo ($\Delta J_n = 0$), reflejando el protocolo normativo que prohíbe abrir el refrigerador durante un apagón para evitar la pérdida acelerada de frío. En los instantes válidos con energía ($S_n = 1$), a cada apertura $j = 1, \dots, \Delta N_n$ se le asocia una magnitud de salto

térmico independiente $\gamma_{n,j}$ extraída de una distribución Normal truncada (Ecuación 7.9.2), conformando asi el incremento de salto acumulado ΔJ_n (Ecuación 5.6.2).

Para verificar la generación de estas perturbaciones externas, se ejecutó una trayectoria anual de control fijando una semilla de aleatoriedad (`np.random.seed(42)`). La simulación generó una trayectoria eléctrica idéntica para los tres escenarios operativos con un total de **68 apagones** en el año, mientras que en el proceso de aperturas de puerta se registraron **0 aperturas** en el Escenario A (Línea Base), **493 aperturas** en el Escenario B (Apego Normativo) y **995 aperturas** en el Escenario C (Contingencia).

8.4. Resolución Numérica de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

Una vez definidos los procesos externos en la malla temporal, se procede a aproximar numéricamente la evolución de la temperatura interna del equipo $T(t)$ determinada por la ecuación diferencial estocástica híbrida de nuestro modelo termodinámico (Ecuación 7.9.1).

8.4.1. Integración Numérica por Cambios de Régimen y Saltos

Para calcular la trayectoria discreta $\{T_n\}_{0\leq n\leq N}$ a partir de la condición inicial $T_0 = 5.0°\text{C}$, se aplica directamente el esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama con cambios de régimen y saltos desarrollado en el alg. 5.3 (Sección 5.6). En cada paso temporal $n = 0, 1, \ldots, N-1$, el algoritmo evalúa el estado del suministro eléctrico S_n y cambia dinámicamente los coeficientes de la ecuación (Sección 5.5):

- **Con suministro eléctrico ($S_n = 1$, régimen $\alpha_n = 1$):** Se activan los parámetros de enfriamiento por convección forzada ($\kappa_{on} = 0.1154\,\text{h}^{-1}$ y $\sigma_{on} = 0.4804$), llevando la temperatura interna hacia el objetivo del termostato ($\theta = 5.0°\text{C}$) e incorporando el salto térmico acumulado ΔJ_n producido por las aperturas de puerta en ese intervalo.
- **Sin suministro eléctrico ($S_n = 0$, régimen $\alpha_n = 2$):** Se activan los parámetros de inercia térmica pasiva ($\kappa_{off} = 0.00232\,\text{h}^{-1}$ y $\sigma_{off} = 0.048$), haciendo que la temperatura interna sea atraída lentamente hacia la temperatura ambiente exterior $T_{amb}(t_n)$, sin saltos por apertura ($\Delta J_n = 0$).

Como se demostró en la Sección 5.6, dado que los coeficientes de difusión σ_{on} y σ_{off} representan ruido aditivo constante respecto al estado $T(t)$, sus derivadas parciales espaciales son nulas ($\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 0$). En consecuencia, el término corrector de segundo orden del esquema de Milstein (Ecuación 5.3.2) se anula, por lo que el esquema híbrido de Euler-Maruyama empleado alcanza la misma precisión en la componente difusiva y tiene garantizada su convergencia fuerte de orden $\gamma = 0.5$ por el Teorema 5.3.

El procedimiento detallado para simular una trayectoria anual de la temperatura interna del refrigerador se presenta en el alg. 8.1.

Algorithm 8.1.

Simulación de una trayectoria anual para la EDE termodinámica del refrigerador Haier HBC-150

1: ***1)*** *Definir el periodo anual* $T_{max} = 8784$ *h y dividir el dominio temporal* $[0, T_{max}]$ *en* $N+1$ *nodos equidistantes* $t_0, t_1, \dots, t_N$ *con tamaño de paso* $\Delta t = 5/60$ *h (*$N = 105,408$*) y* $t_n = n\Delta t,\ n = 0, 1, \dots, N$*. Evaluar en los extremos de la partición la temperatura ambiente exterior* $T_{amb}(t_n)$*, la tasa de fallas eléctricas* $\lambda_{cfe}(t_n)$ *y la función de intensidad de aperturas* $\lambda_{puerta}(t_n)$*.*
2: ***2)*** *Asignar la condición inicial* $T_0 = 5.0^\circ C$*, la temperatura del termostato* $\theta = 5.0^\circ C$*, los parámetros de operación activa (*$\kappa_{on} = 0.1154\ h^{-1}$*,* $\sigma_{on} = 0.4804$*), los parámetros de operación pasiva (*$\kappa_{off} = 0.00232\ h^{-1}$*,* $\sigma_{off} = 0.048$*) y la distribución Normal truncada de salto térmico* $\gamma \sim \text{máx}(0.16, \mathcal{N}(0.76, 0.20^2))$*.*
3: ***3)*** *Generar la trayectoria discreta del estado eléctrico* $\{S_n\}_{0 \le n \le N} \in \{0, 1\}$ *simulando los inicios de falla mediante un Proceso de Poisson No Homogéneo con tasa* $\lambda_{cfe}(t_n)$ *y sus duraciones mediante la distribución Log-Normal correspondiente a la estación climática.*
4: ***4)*** *Resolver recursivamente el sistema en cada subintervalo temporal:*
5: ***Para*** $n = 0, 1, \dots, N-1$ ***Hacer***
6: *Generar una variable aleatoria normal estándar independiente* $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ *y calcular el incremento Browniano:* $\Delta W_n = \sqrt{\Delta t}\, Z_n$*.*
7: ***Si*** $S_n = 1$ *(suministro eléctrico activo, régimen* $\alpha_n = 1$*)* ***Entonces***
8: *Evaluar los coeficientes de enfriamiento activo:* $b_n = \kappa_{on}(\theta - T_n)$ *y* $\sigma_n = \sigma_{on}$*.*
9: *Generar el número de aperturas de puerta en el paso actual:* $\Delta N_n \sim Poisson(\lambda_{puerta}(t_n)\Delta t)$*.*
10: ***Si*** $\Delta N_n > 0$ ***Entonces***
11: *Generar* ΔN_n *magnitudes de salto térmico independientes* $\gamma_{n,1}, \dots, \gamma_{n,\Delta N_n} \sim \text{máx}(0.16, \mathcal{N}(0.76, 0.20^2))$ *y calcular el salto térmico acumulado:* $\Delta J_n = \sum_{j=1}^{\Delta N_n} \gamma_{n,j}$*.*
12: ***En Caso Contrario***
13: *Asignar* $\Delta J_n = 0$*.*
14: ***Fin Si***
15: ***En Caso Contrario*** *(*$S_n = 0$*, falla eléctrica, régimen* $\alpha_n = 2$*)*
16: *Evaluar los coeficientes de calentamiento pasivo:* $b_n = \kappa_{off}(T_{amb}(t_n) - T_n)$ *y* $\sigma_n = \sigma_{off}$*.*
17: *Anular las aperturas de puerta por protocolo:* $\Delta J_n = 0$*.*
18: ***Fin Si***
19: *Actualizar la temperatura interna del equipo:* $T_{n+1} = T_n + b_n \Delta t + \sigma_n \Delta W_n + \Delta J_n$*.*

Simulación de una trayectoria anual para la EDE termodinámica del refrigerador Haier HBC-150

20: ***Fin Para***
21: ***5)*** *Retornar la trayectoria discreta anual aproximada de la temperatura interna:* $\{T_0, T_1, ..., T_N\}$.

8.4.2. Resultados de Seguridad Termodinámica

El algoritmo registra cada evento en el que la temperatura interna del equipo cruza los límites normativos de seguridad (por encima de los 8°C o por debajo de los 2°C). Es importante destacar que en esta trayectoria de prueba, la temperatura de la simulación nunca descendió por debajo del punto de congelación crítico (0°C) en ninguno de los tres escenarios. El cálculo exacto del riesgo para la trayectoria de control inicial (semilla 13) arrojó los siguientes resultados para cada escenario operativo:

Escenario A (Línea Base):

- $T(t) > 8°$**C:** Se tuvo un total de 40 eventos, sumando un tiempo acumulado de 22.25 horas que representa el 0.25 % del año; el primer registro ocurrió en el Día 60.99.
- $T(t) < 2°$**C:** Se tuvo un total de 13 eventos, sumando un tiempo acumulado de 3.58 horas que representa el 0.04 % del año, registrando la primera caída térmica fuera de la norma en el Día 110.25.
- **Tiempo Total Fuera de Rango:** La suma de las excursiones térmicas resultó en un total de 25.83 horas que representa el 0.29 % del año operando fuera del rango normativo.

Escenario B (Apego Normativo):

- $T(t) > 8°$**C:** Se observó un incremento notable con un total de 177 eventos, acumulando un total de 121.83 horas que representa el 1.39 % del año; debido a la interacción humana, la primera falla crítica se adelantó drásticamente hasta el Día 4.65.
- $T(t) < 2°$**C:** Ocurrieron únicamente 3 eventos con un tiempo acumulado de 0.83 horas que representa el 0.01 % del año, manteniendo su primer registro en el Día 110.25.
- **Tiempo Total Fuera de Rango:** El equipo operó en condiciones de riesgo durante un total de 122.67 horas que representa el 1.40 % del año simulado.

Escenario C (Contingencia):

- $T(t) > 8°$**C:** El estrés logístico provocó un total de 435 eventos, alcanzando un tiempo acumulado severo de 475 horas que representa el 5.41 % del año; al igual

que en el escenario anterior, el primer registro de falla ocurrió rápidamente en el Día 4.65.

- $T(t) < 2°\mathbf{C}$**:** Debido a la saturación de calor por aperturas constantes, no se registró ningún evento de enfriamiento excesivo, manteniéndose un acumulado de 0.00 horas.
- **Tiempo Total Fuera de Rango:** En este contexto, el equipo sumó un total de 475 horas operando fuera de rango, lo que representa el 5.41 % del año.

8.4.3. Análisis Comparativo de Trayectorias: Visión Macro (Anual)

A continuación, se presentan las soluciones numéricas completas para un año de simulación bajo los tres escenarios.

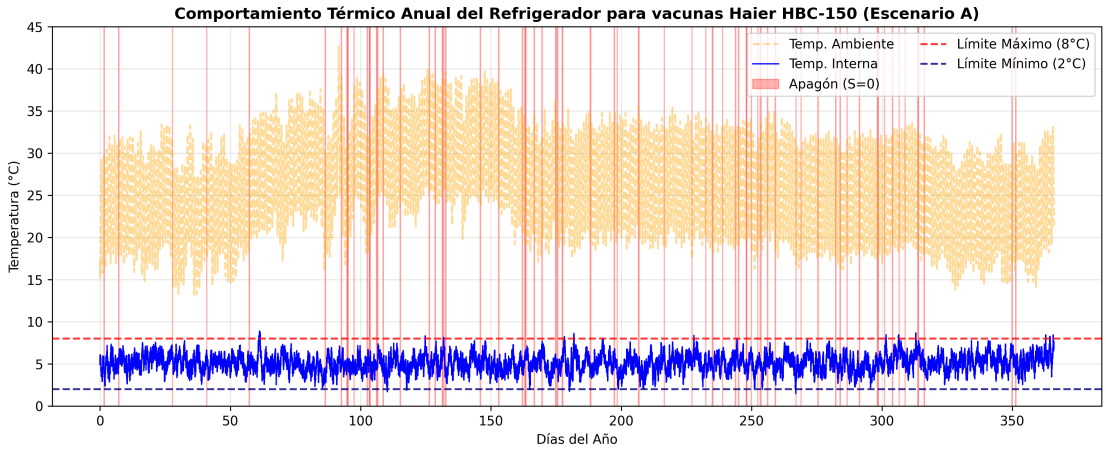


Figura 8.3.: Comportamiento térmico anual (Escenario A). Las zonas sombreadas en rojo indican la ocurrencia de los 68 apagones. La trayectoria azul representa la temperatura interna del equipo (la solución numérica de la EDE) la cual se mantiene estable y rara vez rompe la cadena de frío, viéndose afectada únicamente por fallas eléctricas prolongadas, y la trayectoria de color amarillo indica la temperatura ambiente en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

Interpretación Anual: La visualización anual demuestra de forma contundente la sensibilidad del sistema a la interacción humana. En el Escenario A, el aislamiento térmico del equipo y el clima de la región son suficientes para mantener la temperatura segura durante los primeros dos meses (enero y febrero), presentando fallas a partir de la época de calor extremo. Conforme avanzamos al Escenario B y C, el volumen de excursiones superiores a 8°C crece agresivamente (pasando de 40 a 435 eventos). Esto prueba que el suministro eléctrico de la CFE, aunque deficiente, no es el destructor principal de la cadena de frío, sino el estrés logístico de las aperturas continuas.

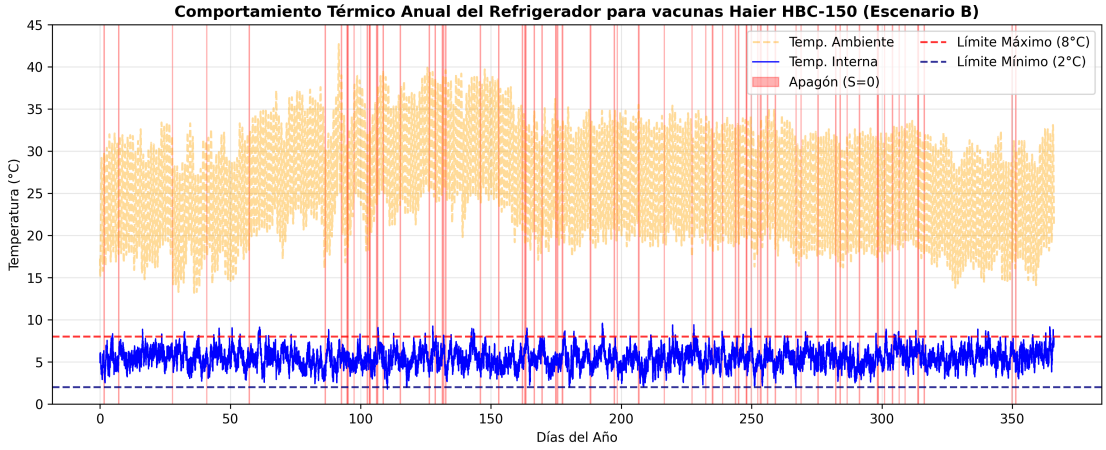


Figura 8.4.: Comportamiento térmico anual (Escenario B). La interacción humana controlada engrosa la trayectoria azul, incrementando los picos térmicos debido a las aperturas matutinas y vespertinas.

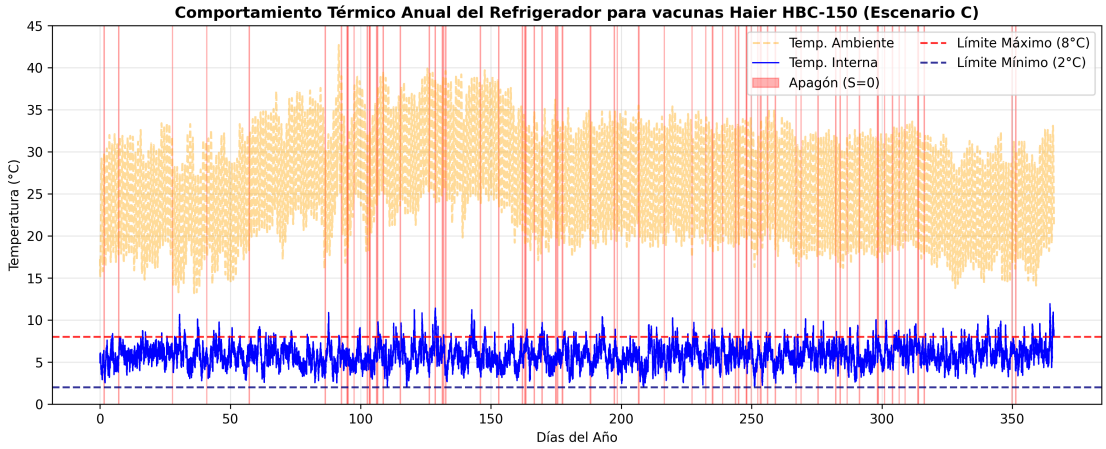


Figura 8.5.: Comportamiento térmico anual (Escenario C). La saturación logística colapsa el control termodinámico; la trayectoria azul se muestra muy oscilatoria, rompiendo continuamente la barrera de los 8°C.

8.4.4. Análisis Comparativo de Trayectorias: Visión Micro (Acercamiento Mensual)

Para aislar el comportamiento de la Ecuación Diferencial Estocástica y los impactos térmicos instantáneos (γ_i), se realizó un acercamiento al primer mes de la simulación.

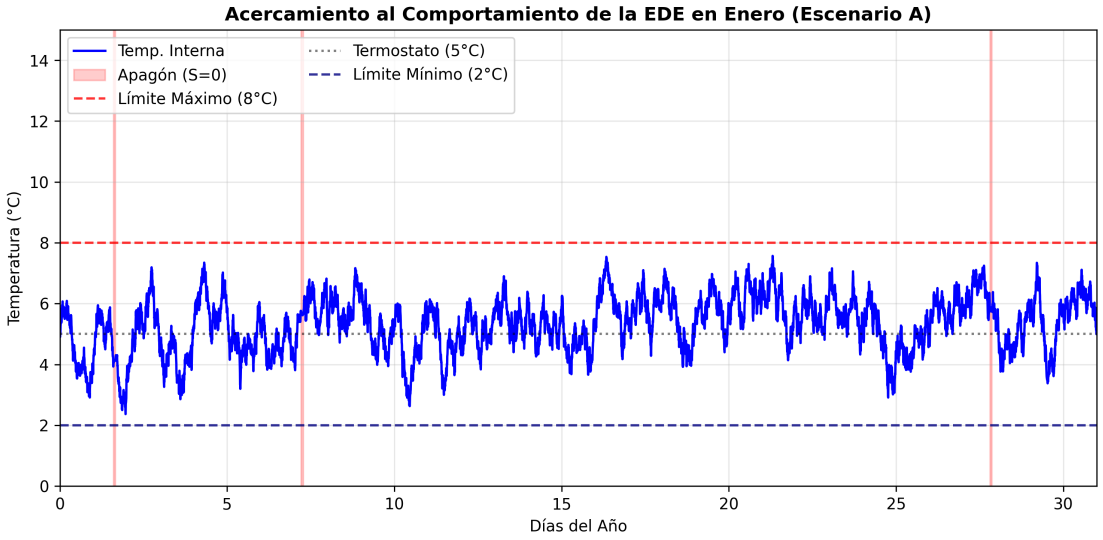


Figura 8.6.: Acercamiento del comportamiento de la EDE durante el mes de enero (Escenario A). Se omitió el clima exterior para observar la estabilidad del termostato (5°C), sin la presencia de personal clínico, las únicas perturbaciones observables son curvas suaves de calentamiento pasivo durante los cortes de energía.

Interpretación Mensual: A nivel mensual, se observa cómo el esquema de Euler-Maruyama resuelve la dinámica de reversión a la media (atracción hacia el termostato de 5°C). Un hallazgo estadístico notable es la coincidencia exacta del primer evento de excursión crítica en los escenarios B y C (ocurrido en el Día 4.65). Esto no es un error numérico, sino la consecuencia directa del modelo acoplado: en el Día 4.65 en el Escenario B y C ocurrió una apertura vespertina con un alto impacto térmico (γ_i) que provocó que la temperatura del equipo superara el umbral de los 8°C.

8.5. Integración de la Dinámica Logística y Mermas

Para pasar de una pérdida de viabilidad teórica a la pérdida de vacunas, acomodamos la simulación a un modelo de inventario dinámico ($I(t)$), donde t representa el tiempo cada 5 minutos. El algoritmo avanza en el tiempo y evalúa tres reglas operativas clave para la logística:

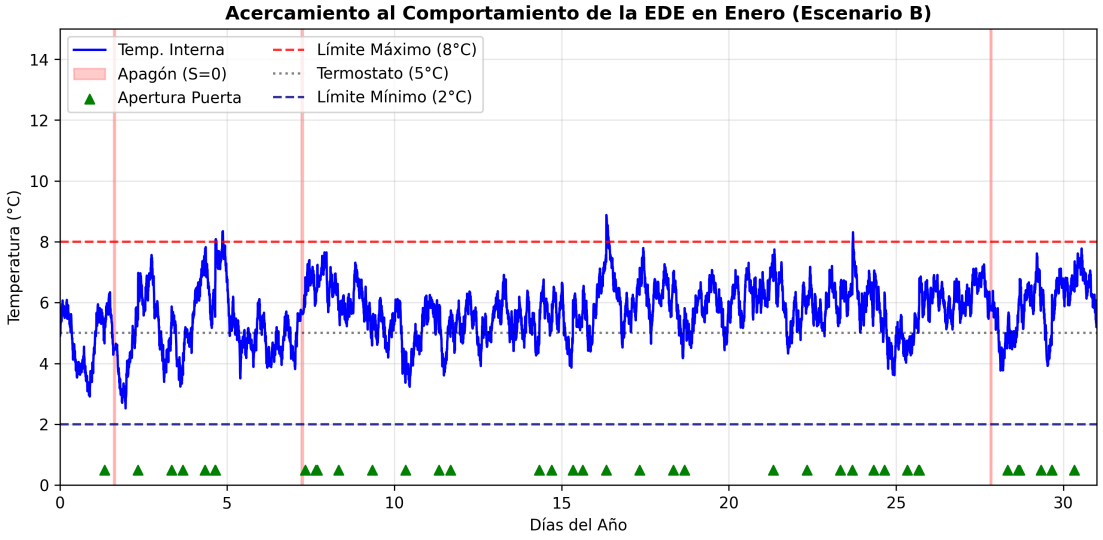


Figura 8.7.: Acercamiento del comportamiento de la EDE durante el mes de enero (Escenario B). Se observan picos verticales (salto térmico) debido a las aperturas de la puerta del refrigerador (triángulos verdes inferiores), seguidos de una recuperación exponencial forzada por el compresor.

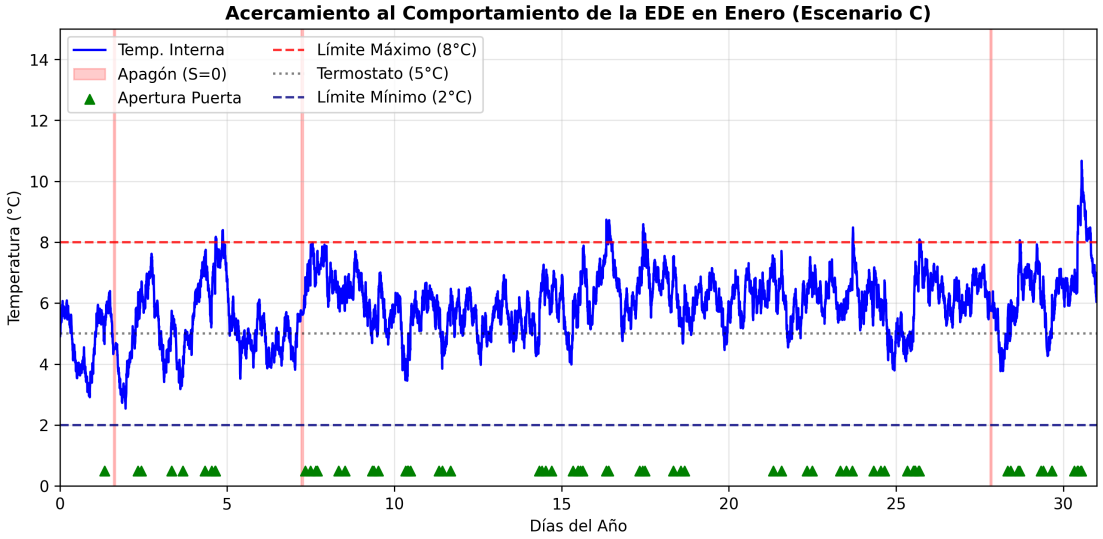


Figura 8.8.: Acercamiento del comportamiento de la EDE durante el mes de enero (Escenario C). La temperatura rebasa el límite de los 8°C de forma constante debido a la alta frecuencia del proceso de Poisson para viajes de resurtido (mayor cantidad de triángulos verdes).

1. **Consumo Logístico:** Dependiendo del escenario como se vio en la Sección 7.11, el volumen de vacunas se descuenta del inventario. Para el Escenario A (Línea Base), el consumo es cero. Para el Escenario B (Apego Normativo), se extrae una cantidad diaria fija a las 8:00 AM que varía según el mes (ej. mayor demanda en octubre por la campaña de Influenza). Para el Escenario C (Contingencia), el consumo acelera y se acopla de manera dinámica a los eventos de resurtido a lo largo de la jornada.
2. **Inercia Térmica y Daño Farmacológico:** La temperatura $T(t)$ calculada por la EDE corresponde al aire interno del equipo. Sin embargo, el biológico líquido dentro de los frascos de vidrio posee inercia térmica. Para modelar este retardo físico, el algoritmo aplica un filtro de tolerancia de 30 minutos: la ecuación de Arrhenius solo entra en vigor si el aire permanece por encima de los 8°C de manera ininterrumpida durante 6 iteraciones continuas. Cumplida esta condición, se extrae la fracción de pérdida y se multiplica por el inventario actual en ese instante de tiempo, sumando el resultado al vector de dosis destruidas.
3. **Reabastecimiento Automático:** Si el inventario cae por debajo del punto de reorden de 1000 dosis (el 20 % de su capacidad máxima), se simula la llegada de la ruta jurisdiccional que llena el equipo hasta su capacidad máxima de 5000 dosis, registrando el ingreso en la sumatoria anual para calcular el porcentaje de pérdida final.

8.5.1. Resultados del Impacto Logístico

Al finalizar el año de simulación para la trayectoria de control (semilla 13), la interacción entre la EDE, el filtro de inercia de 30 minutos y el modelo de inventario arrojó los siguientes resultados totales de pérdida física:

Escenario A (Línea Base): Dado que no existe consumo operativo, el equipo operó de manera estática, registrando un ingreso total y único de 5000 dosis al inicio del año. De este volumen inmovilizado, los cortes eléctricos de la red externa lograron destruir un total de 108 dosis, lo que representa un porcentaje de pérdida anual del 2.16 %.

Escenario B (Apego Normativo): La dinámica de vacunación diaria generó una sana rotación del inventario, registrando un ingreso total de 25373 dosis a lo largo del año. Gracias a que las aperturas de la puerta son moderadas, el control térmico se mantuvo estable y únicamente se destruyeron 414 dosis, logrando el porcentaje de pérdida anual más bajo de los tres escenarios con apenas un 1.63 %.

Escenario C (Contingencia): La contingencia obligó a realizar viajes masivos de reabastecimiento, elevando drásticamente el flujo anual a 77843 dosis. La coincidencia del alto volumen de vacunas almacenadas con el colapso térmico, provocado por la saturación de aperturas, provocó una destrucción severa de 2395 dosis, alcanzando el porcentaje de pérdida anual más alto con un 3.08 %.

8.5.2. Análisis Comparativo del Inventario y Riesgo Materializado

Para visualizar cómo interactúa el consumo operativo con los momentos exactos de falla termodinámica, se generaron gráficas de doble eje para los tres escenarios en estudio.

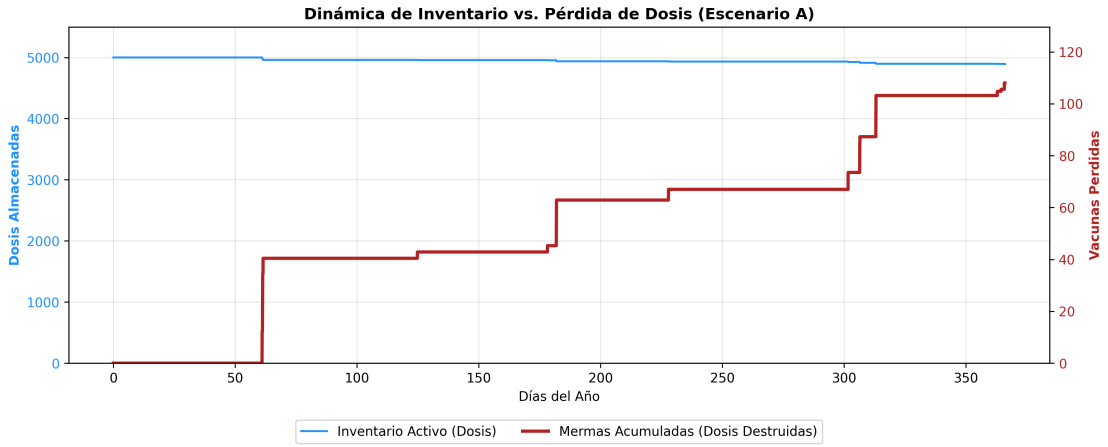


Figura 8.9.: Dinámica logística anual (Escenario A). La trayectoria continua de color azul (eje izquierdo) representa el nivel de inventario activo, el cual se mantiene como una línea recta casi todo el año debido a la ausencia de extracciones. La trayectoria escalonada de color rojo (eje derecho) representa el crecimiento acumulado de las dosis perdidas, observando que los saltos o daños coinciden exclusivamente a cuando se rompe la cadena de frío de manera prolongada.

Interpretación de la Dinámica Logística:

La visualización del inventario revela una aparente contradicción de riesgo. Como se vio anteriormente en la Sección 8.4.2, el Escenario A tuvo menos excursiones térmicas que el Escenario B; sin embargo, su porcentaje de pérdida logística fue mayor (2.16 % frente a 1.63 %). Esto se debe al efecto protector de la rotación: en la Línea Base, las mismas 5000 dosis permanecen estancadas absorbiendo el impacto de cada corte eléctrico del año; en cambio, el Apego Normativo salva las dosis al aplicarlas en pacientes antes de que ocurran los apagones.

No obstante, cuando el ritmo logístico sale de control (Escenario C), esta protección colapsa. El exceso de aperturas no solo rompe la cadena de frío, sino que al estar el equipo constantemente lleno, cada excursión térmica encuentra miles de vacunas vulnerables al mismo tiempo, multiplicando el daño absoluto a 2395 dosis, es decir, un 3.08 % de pérdida anual.

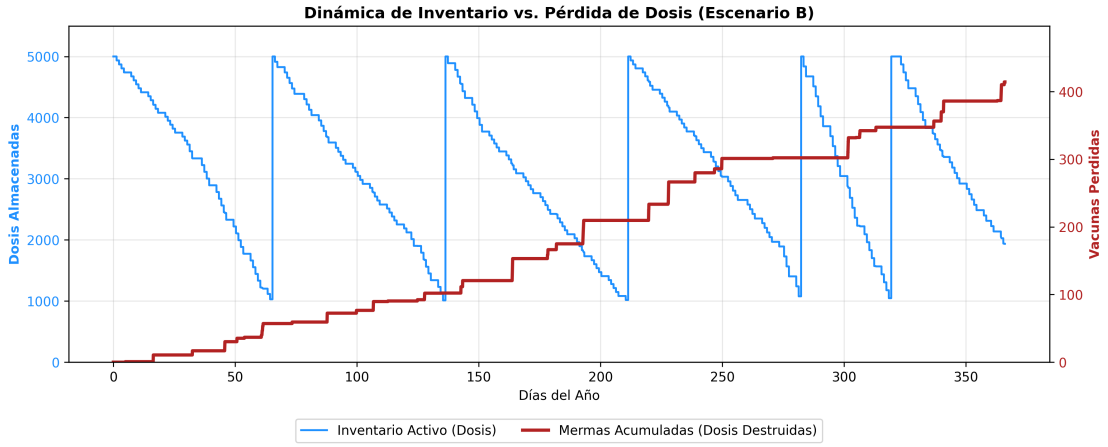


Figura 8.10.: Dinámica logística anual (Escenario B). La trayectoria azul muestra el patrón típico de "diente de sierra" generado por la extracción diaria a las 8:00 AM y los resurtidos verticales al tocar el punto de reorden. La trayectoria roja de mermas acumuladas crece de forma espaciada y moderada.

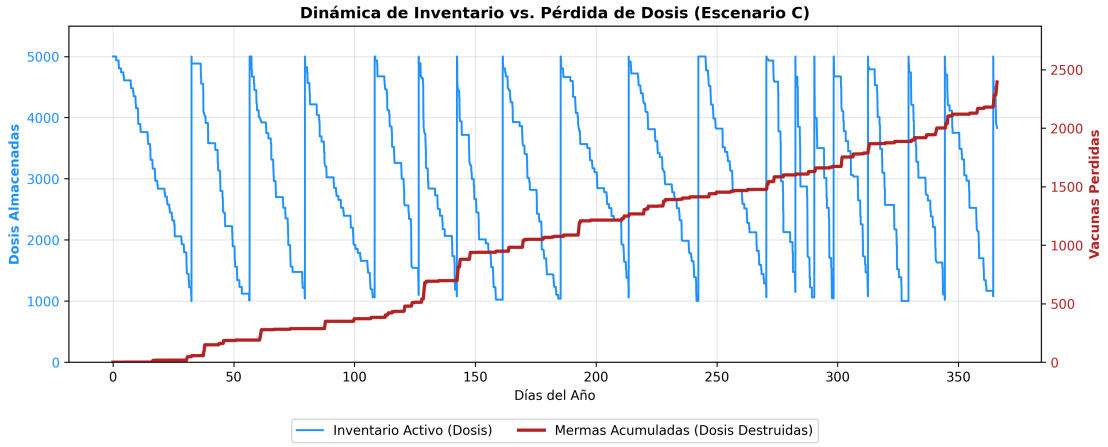


Figura 8.11.: Dinámica logística anual (Escenario C). La trayectoria azul evidencia un consumo caótico por la contingencia, obligando a múltiples resurtidos por semana. En consecuencia, la trayectoria roja se dispara agresivamente en forma exponencial.

8.6. Estructura de la Simulación de Monte Carlo

Dado que el alg. 8.1 junto con el modelo de inventario producen únicamente una realización anual aleatoria, no es posible evaluar la confiabilidad del sistema a partir de una sola trayectoria. Para medir rigurosamente el riesgo operativo y estimar el valor esperado $\mathbb{E}[g(T(t))]$ de los estadísticos de interés cuya distribución analítica es desconocida, el modelo completo se integró dentro de un esquema de simulación de Monte Carlo (Giles 2008; Platen y Bruti-Liberati 2010).

En cada realización anual k, el algoritmo evalúa la trayectoria simulada y extrae las siguientes métricas estadísticas:

- **Termodinámica:** Horas acumuladas y conteo de las rupturas de la cadena de frío ($T(t) > 8°\text{C}$ y $T(t) < 2°\text{C}$), así como la vigilancia del riesgo crítico de congelación ($T(t) < 0°\text{C}$).
- **Logística y Riesgo:** El día exacto en que ocurrió la primera falla crítica, el total de dosis perdidas, el porcentaje anual de pérdida y la merma por mes para evaluar la estacionalidad del riesgo.

Este procedimiento se ejecuta de forma iterativa generando $M = 5000$ trayectorias anuales independientes (asignando en cada una semillas de aleatoriedad indexadas para garantizar la reproducibilidad de la simulación), aproximando el valor esperado de cada métrica mediante el promedio muestral $\hat{\mu}_M = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{k=1}^{M} g\left(T^{(k)}\right)$ (Wang 2016).

De acuerdo con la teoría de convergencia débil (Definición 5.2) y la descomposición del Error Cuadrático Medio en simulaciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, la precisión de este estimador depende tanto del sesgo numérico de discretización temporal como de la varianza estadística de muestreo. Por un lado, el tamaño de paso de 5 minutos ($\Delta t = 5/60$ h) en el esquema de Euler-Maruyama (cuyo orden débil es $\beta = 1.0$) mantiene acotado el sesgo numérico sistemático; por otro lado, al simular $M = 5000$ años independientes, la **Ley de los Grandes Números** (Ross 2018) asegura que el error estándar de muestreo decaiga a razón de $M^{-1/2} \approx 0.0141$ (por debajo del 1.5 % de la desviación estándar de cada métrica). Esto elimina el efecto de fluctuaciones atípicas individuales y estabiliza los promedios poblacionales bajo cada uno de los tres escenarios operativos evaluados.

8.7. Resultados Estadísticos y Análisis de Riesgo

Una vez completadas las 5000 simulaciones de Monte Carlo, procedemos a extraer las métricas operativas y termodinámicas de todos los años simulados. La simulación masiva de trayectorias revela el verdadero comportamiento del sistema a largo plazo, eliminando las variaciones extremas de un solo año.

A continuación, se presenta la tabla comparativa con los promedios poblacionales empíricos, seguida del análisis descriptivo de dispersión e intervalos de confianza para cada escenario.

Tabla 8.2.: Estadísticas de riesgo: Promedio anual para los tres escenarios operativos.

Métrica	Escenario A (Línea Base)	Escenario B (Apego Normativo)	Escenario C (Contingencia)
Perturbaciones Externas			
Apagones	64.3	64.3	64.3
Aperturas de Puerta	0	499	998
Riesgo Termodinámico			
$T(t) > 8°C$	26.4 eventos	134.6 eventos	419.7 eventos
$T(t) < 2°C$	25.2 eventos	12.5 eventos	9.0 eventos
$T(t) < 0°C$	0 eventos	0 eventos	0 eventos
Tiempo Fuera del Rango Normativo	24.4 horas (0.28 %)	95.6 horas (1.09 %)	420.6 horas (4.79 %)
Impacto Logístico (Mermas)			
Dosis Perdidas (Volumen)	61 dosis	343 dosis	1,905 dosis
Pérdida Relativa (%)	1.21 %	1.36 %	2.57 %

8.7.1. Riesgo Operativo y Termodinámico Empírico

Escenario A (Línea Base):

La simulación de Monte Carlo estabilizó el riesgo externo en un promedio de 64.3 apagones anuales. Al no existir interacción humana (cero aperturas), el riesgo recae puramente en la termodinámica pasiva del equipo. Se registró un promedio de 26.4 rupturas de la cadena de frío anuales por encima de los 8°C (acumulando 12.6 horas) y 25.2 rupturas por debajo de los 2°C (acumulando 11.8 horas). Es necesario destacar que la inercia térmica protegió al equipo de la congelación profunda, manteniendo el riesgo por debajo de los 0°C estrictamente en cero. En el ámbito logístico, esta exposición pasiva provocó una destrucción promedio de 61 dosis (1.21 % de pérdida anual). Sin embargo, el intervalo de confianza del 95 % resulta muy amplio, oscilando entre apenas 2 y hasta 179 dosis destruidas al año, lo que sugiere una alta volatilidad ante apagones inusualmente largos.

Escenario B (Apego Normativo):

Al introducir la interacción humana con un promedio de 499 aperturas anuales, el riesgo termodinámico aumentó significativamente. Los eventos donde $T(t) > 8°C$ aumentaron a un promedio de 134.6, acumulando 90 horas de riesgo térmico (1.02 % del año), en cambio, los eventos por debajo de los 2°C disminuyeron a un promedio de 12.5, acumulando 5.6 horas (0.06 % del año). Adicionalmente, el primer registro de falla crítica se adelantó drásticamente: de promediar en el Día 38 (Escenario A) a ocurrir en el Día 8. Este nivel de estrés aumentó las pérdidas a un promedio de 343 dosis anuales (1.36 % de pérdida anual), con un intervalo de confianza del 95 % que advierte escenarios de riesgo donde un equipo normado puede perder entre 166 y hasta 573 dosis en un solo año.

Escenario C (Contingencia):

La saturación logística colapsa por completo la cadena de frío. Con casi 1,000 aperturas anuales (998), el equipo sufre 419.7 rupturas de la cadena de frío anuales por encima de los 8°C en promedio (acumulando 416.5 horas) y 9 rupturas por debajo de los 2°C (acumulando 4.1 horas), acumulando un valor crítico total de 420.6 horas (4.79 % del año) operando fuera de rango. Bajo este escenario de estrés extremo, el primer cruce fuera de la norma ocurre en promedio apenas en el Día 3 de operación. El impacto en el inventario es devastador: se pierden en promedio 1,905 dosis por año (2.57 % de pérdida anual), con un intervalo de confianza del 95 % que va de 1348 hasta las 2521 dosis destruidas.

Interpretación Comparativa del Modelo:

Por la **Ley de los Grandes Números**, a través de las 5,000 simulaciones se resolvió la contradicción de riesgo observada en la trayectoria de prueba inicial. Aunque en años individuales aislados la inmovilidad del inventario (Escenario A) puede resultar en una mayor pérdida relativa frente al consumo normativo (Escenario B) debido al efecto protector de la rotación de vacunas, el promedio poblacional a largo plazo demuestra lo contrario. A la larga, el volumen masivo de rupturas de la cadena de frío provocadas por las 499 aperturas del Escenario B sobrepasa cualquier beneficio de rotación, situando su pérdida promedio (1.36 %) por encima del aislamiento absoluto (1.21 %). Además, se confirma que el colapso operativo (Escenario C) no es un riesgo lineal, sino exponencial: duplicar las aperturas de puerta no duplicó las pérdidas, sino que las multiplicó por más de cinco veces (de 343 a 1905 dosis), evidenciando la fragilidad termodinámica de los equipos frente a la saturación clínica.

8.7.2. Análisis de Trayectorias

La tabla anterior revela que los intervalos de confianza del 95 % para la pérdida de biológicos son muy amplios en todos los escenarios operativos. Para comprender visualmente la causa de esta dispersión, se extrajo una submuestra aleatoria de 30 trayectorias (30 años simulados distintos) para cada escenario.

El comportamiento de los daños acumulados demuestra que el riesgo no es lineal. La tendencia de las dosis perdidas a lo largo de los 366 días depende estrictamente de la coincidencia temporal exacta entre la ocurrencia de un apagón prolongado de la CFE y el nivel de saturación de vacunas almacenadas en ese día específico.

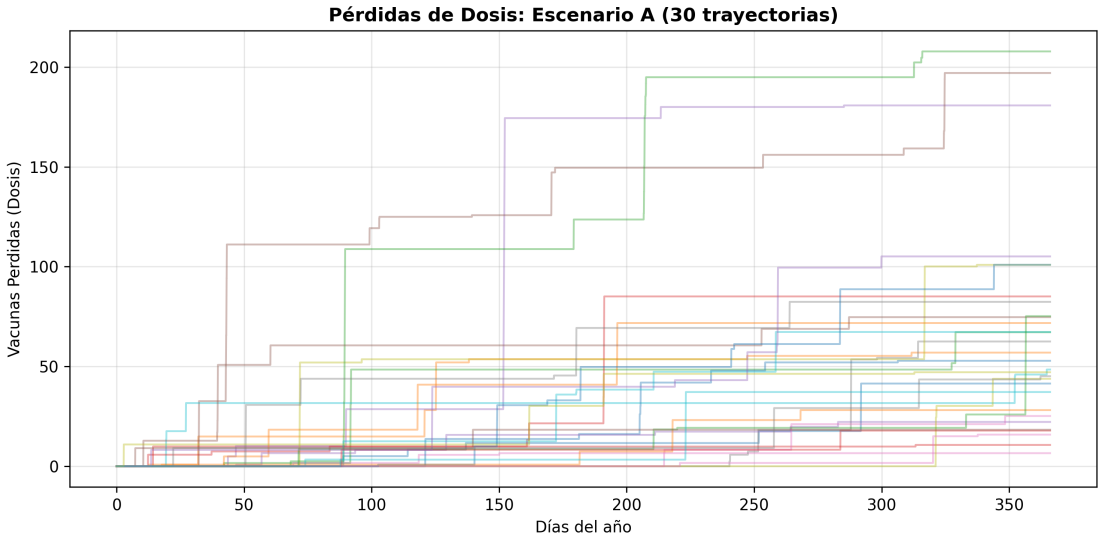


Figura 8.12.: 30 trayectorias anuales aleatorias (Escenario A). Las trayectorias se mantienen planas (cero pérdidas) durante largos periodos de tiempo. Cuando ocurre un apagón que supera la inercia térmica, la trayectoria sube drásticamente (escalón vertical). La gran separación vertical entre las líneas al final del año (Día 366) explica visualmente la alta varianza del modelo.

Interpretación Comparativa de las Trayectorias:

Al observar el comportamiento de las 30 trayectorias conjuntas, se comprueba la hipótesis de fragilidad de la red de frío. En el Escenario A, el aislamiento absoluto permite que existan "años afortunados" donde el equipo apenas pierde unas cuantas dosis, pero basta un solo año con un apagón crítico prolongado para que la pérdida escale drásticamente (como se observa en la línea superior en la Figura 8.12 que cruza las 200 dosis).

Por el contrario, el Escenario C demuestra que la contingencia operativa elimina el factor "suerte". La densidad y homogeneidad de las trayectorias confirman que, bajo estrés logístico masivo, el colapso del biológico está garantizado independientemente de si el clima de ese año fue favorable o si hubo menos apagones. La saturación de aperturas domina por completo al sistema, provocando una destrucción acelerada, continua e inevitable.

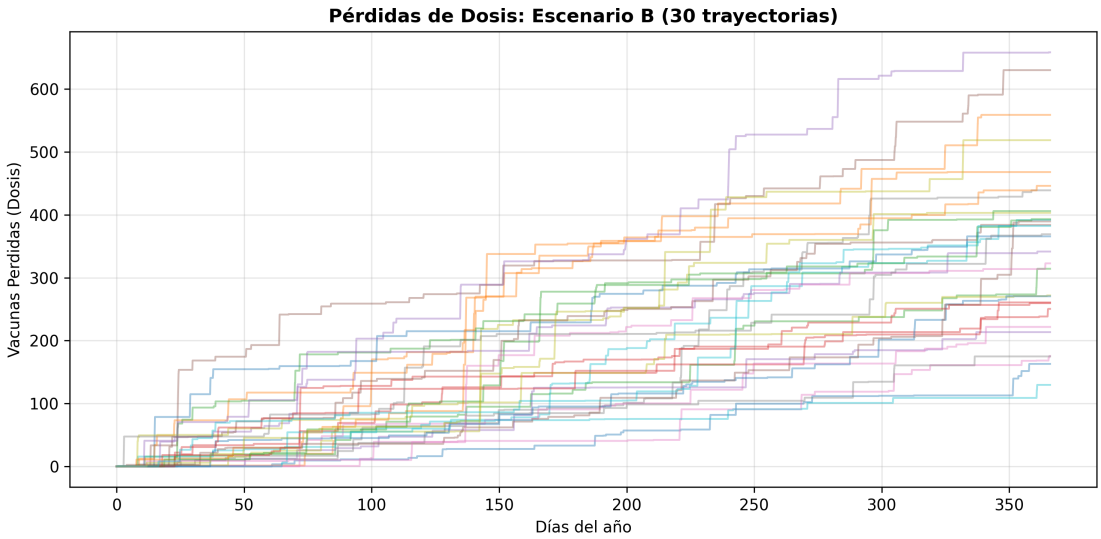


Figura 8.13.: 30 trayectorias anuales aleatorias (Escenario B). El estrés introducido por las aperturas matutinas y vespertinas aumenta la acumulación de daños. En lugar de escalones aislados, las trayectorias muestran un crecimiento en forma de escalera a lo largo de todo el año, evidenciando una constante ruptura de la cadena de frío.

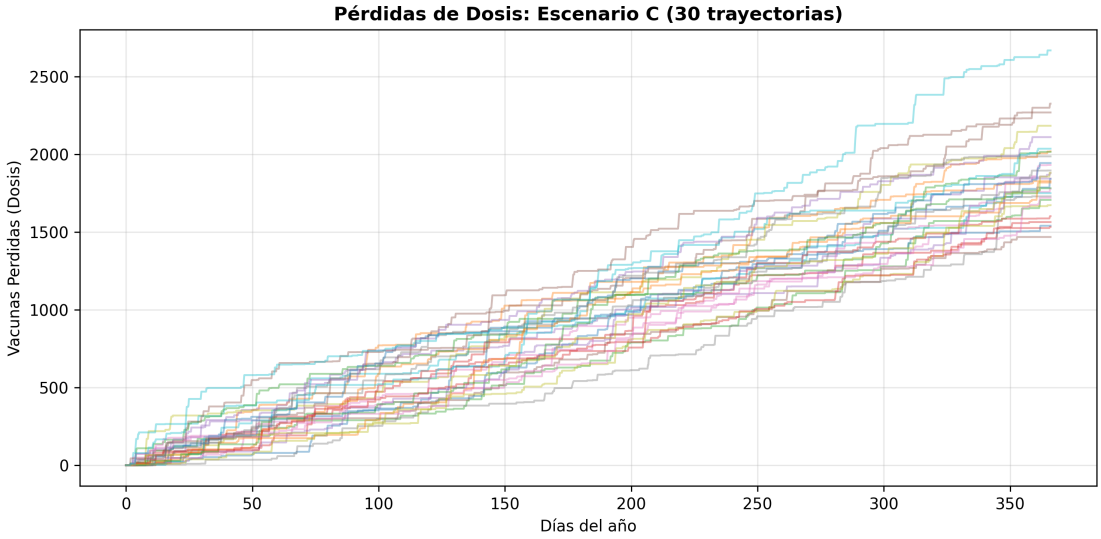


Figura 8.14.: 30 trayectorias anuales aleatorias (Escenario C). La saturación logística colapsa la termodinámica del sistema. Las trayectorias abandonan el comportamiento escalonado y adoptan una pendiente positiva continua casi recta. Todas las líneas se disparan uniformemente hacia arriba, superando rápidamente el umbral de las 1,000 dosis destruidas.

8.7.3. Estacionalidad del Riesgo Operativo

Al desglosar las pérdidas de dosis de forma mensual, los datos revelan el verdadero comportamiento del riesgo termodinámico a lo largo del año. Para evaluar esta métrica de forma rigurosa, se analizaron dos estimadores de centralidad: el promedio mensual (que es sensible a los años con apagones catastróficos) y la mediana mensual (estadísticamente más robusta porque representa el escenario más probable, aislando las fluctuaciones extremas).

Inicialmente, desde un punto de vista puramente climático, se podría suponer que los meses de calor extremo en Tuxtla Gutiérrez (abril y mayo) presentarían la mayor cantidad de vacunas perdidas debido al estrés térmico ambiental sobre el equipo. No obstante, las 5000 simulaciones de Monte Carlo demuestran que la interacción humana modifica por completo este patrón natural.

Escenario A (Línea Base):

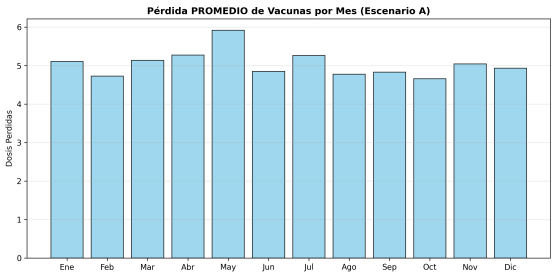


Figura 8.15.: Pérdida promedio mensual (Escenario A). Se observa una pérdida uniforme de alrededor de 5 dosis mensuales, con un ligero pico en mayo debido a las fallas eléctricas por estrés térmico.

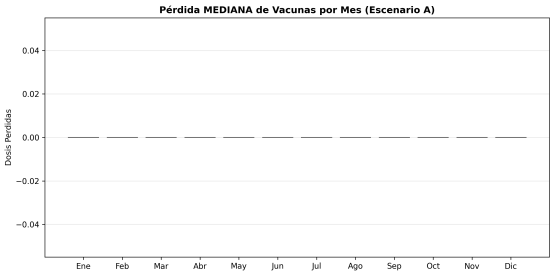


Figura 8.16.: Pérdida mediana mensual (Escenario A). La mediana se mantiene estrictamente en cero durante los 12 meses del año, demostrando que en al menos el 50 % de los escenarios climáticos normales no se pierde ni una sola vacuna al mes.

Escenario B (Apego Normativo):

Escenario C (Contingencia):

Interpretación de la Estacionalidad:

El análisis estacional confirma que **el estrés operativo domina por completo al factor climático.** En el Escenario A, la Figura 8.16 demuestra que la infraestructura termoaislante del equipo Haier HBC-150 es lo suficientemente robusta para sobrevivir a la intemperie chiapaneca sin sufrir daños (mediana igual a cero en todos los meses). Las

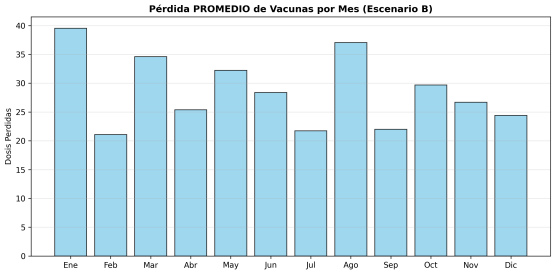


Figura 8.17.: Pérdida promedio mensual (Escenario B). El estrés logístico aumenta significativamente las pérdidas. El mes de enero alcanza casi 40 dosis perdidas, seguido por un pico secundario en agosto durante la temporada de tormentas.

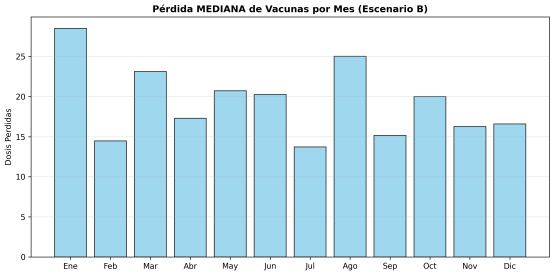


Figura 8.18.: Pérdida mediana mensual (Escenario B). A diferencia del Escenario A, la mediana ya no es cero. Enero y agosto se consolidan como los meses de mayor riesgo operativo esperado.

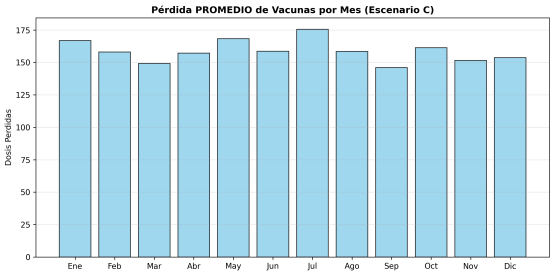


Figura 8.19.: Pérdida promedio mensual (Escenario C). La saturación logística domina el sistema, superando las 150 dosis mensuales de forma casi homogénea a lo largo del año.

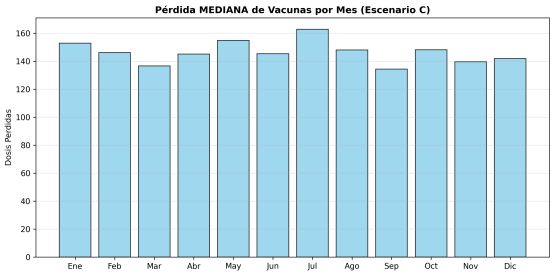


Figura 8.20.: Pérdida mediana mensual (Escenario C). El colapso se confirma. Julio destaca ligeramente como el mes más crítico, superando las 160 dosis perdidas como escenario más probable.

pérdidas residuales observadas en el promedio del Escenario A son producto exclusivo de la cola de la distribución (años atípicamente catastróficos).

Sin embargo, al introducir la interacción humana, el patrón climático desaparece. En el Escenario B, la vulnerabilidad ya no recae en la primavera, sino que se desplaza hacia enero y agosto, coincidiendo con las épocas donde el volumen del inventario interactúa de manera letal con las perturbaciones eléctricas. Finalmente, en el Escenario C, la contingencia operativa nivela el riesgo: el equipo pierde su capacidad de recuperación térmica provocando que todos los meses del año (sin importar si es invierno o verano) resulten devastadores para la viabilidad de las vacunas, consolidando la destrucción sistemática del inventario activo.

8.7.4. Distribución del Riesgo Operativo

Para estandarizar el nivel de riesgo sin importar la escala de la unidad médica, las dosis perdidas se transformaron en porcentajes de pérdida relativa respecto al volumen total de vacunas manejadas por el equipo en cada año simulado. La visualización de la frecuencia de estas pérdidas a lo largo de las 5000 simulaciones de Monte Carlo permite analizar la forma de la distribución del riesgo para cada escenario operativo.

Interpretación de las Distribuciones:

La visualización de los histogramas muestra que el comportamiento del riesgo cambia conforme aumenta la interacción humana. En el Escenario A y B, la clara separación entre la media (línea azul) y la mediana (línea verde) evidencia que los datos están sesgados; este comportamiento asimétrico es típico de los sistemas de riesgo operativo pasivos, donde los daños dependen de fallas externas intermitentes y severas (como los apagones prolongados de la CFE).

Sin embargo, en el Escenario C, la distribución tiene una forma casi simétrica. Esto ocurre gracias al Teorema del Límite Central: la altísima frecuencia de aperturas de puerta (casi 1000 al año) se convierte en el factor dominante del sistema, "suavizando" el impacto de los apagones aislados y garantizando una tasa de pérdida constante y predeciblemente alta. La asimetría visual observada en los primeros dos escenarios sugiere fuertemente que las distribuciones no siguen un comportamiento normal, lo cual requiere una comprobación matemática estricta antes de realizar inferencias poblacionales definitivas.

8.7.5. Dispersión y Valores Atípicos (Diagramas de Caja)

Para cuantificar visualmente la varianza, los rangos intercuartílicos y la magnitud exacta de los años extremos observados en las colas de los histogramas, se construyeron diagramas de caja (*boxplots*) para la pérdida absoluta de vacunas en los tres escenarios operativos.

Interpretación de la Dispersión:

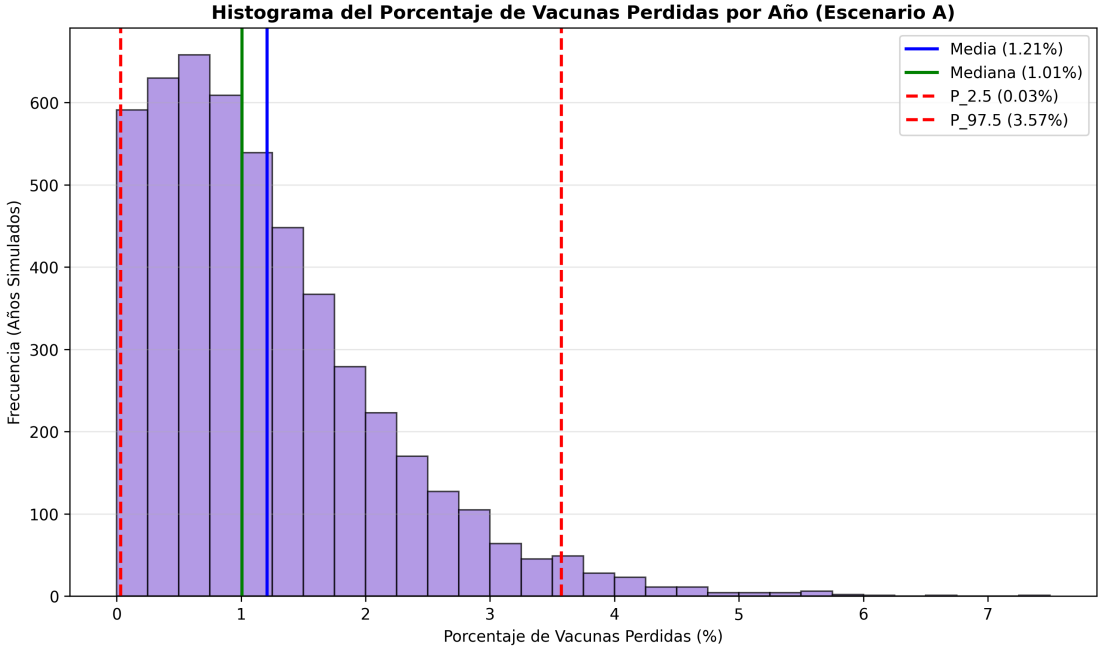


Figura 8.21.: Histograma del porcentaje de vacunas perdidas anualmente (Escenario A). La distribución presenta una fuerte asimetría positiva (una cola larga estirada hacia la derecha). Esto indica que, aunque la concentración principal de los datos sugiere pérdidas bajas (mediana del 1.01 % (línea verde)), existen años atípicamente catastróficos que arrastran el promedio general hacia arriba (media del 1.21 % (línea azul)). Las líneas rojas punteadas delimitan el intervalo empírico del 95 %, mostrando la alta dispersión hacia años extremos.

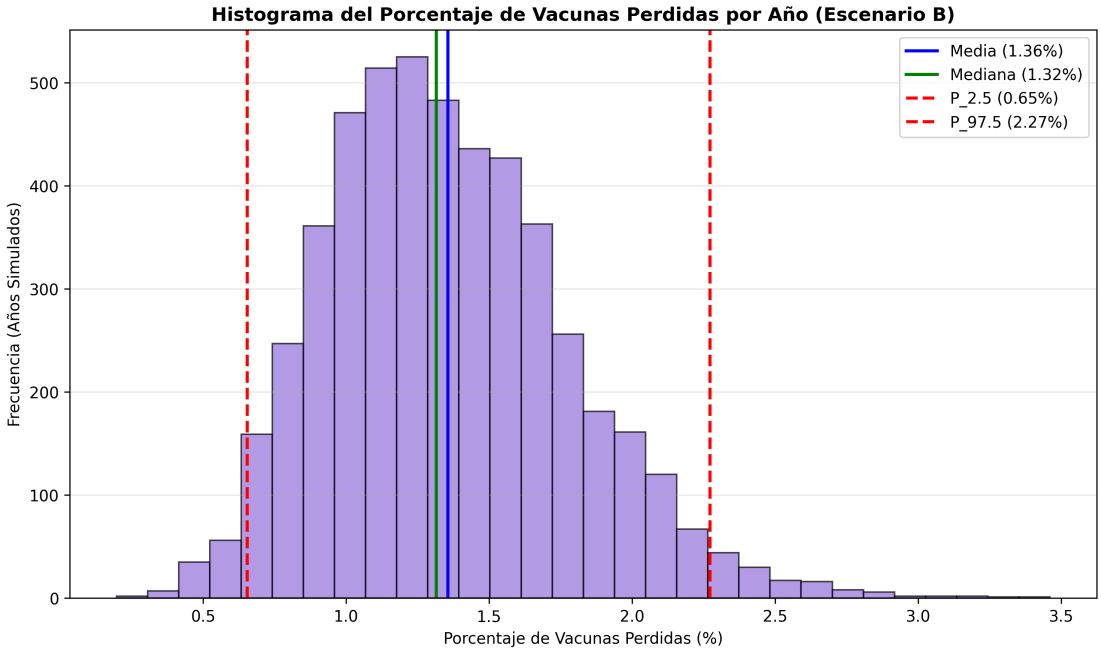


Figura 8.22.: Histograma del porcentaje de vacunas perdidas anualmente (Escenario B). Al introducir el estrés logístico normativo (aperturas de la puerta del equipo), la distribución completa se desplaza hacia la derecha, incrementando tanto la mediana (1.32 %) como la media (1.36 %). Aunque la asimetría disminuye ligeramente en comparación con el Escenario A, la cola derecha sigue advirtiendo de años de riesgo donde la pérdida relativa supera el 2.27 %.

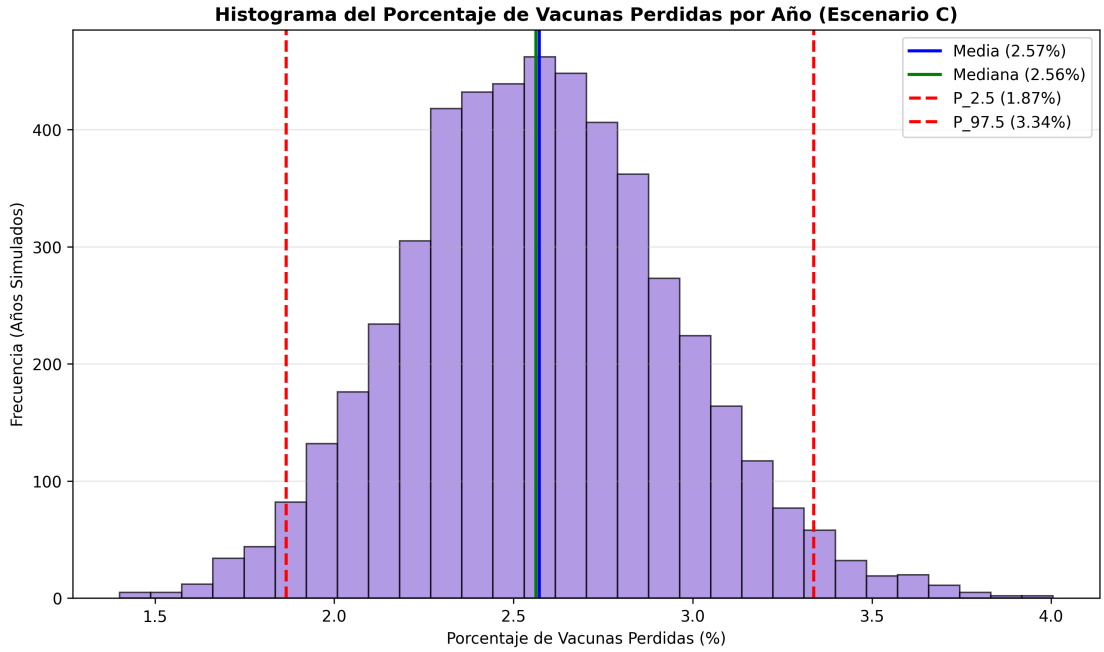


Figura 8.23.: Histograma del porcentaje de vacunas perdidas anualmente (Escenario C). La contingencia extrema transforma drásticamente la forma de la distribución, volviéndola visualmente simétrica (similar a una campana de Gauss). La mediana (2.56 %) y la media (2.57 %) prácticamente se igualan, indicando un nivel de destrucción sumamente alto y un intervalo de confianza del 95 % altamente concentrado.

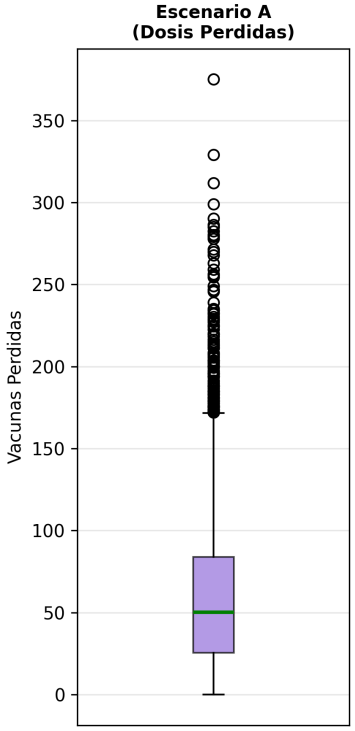


Figura 8.24.: Diagrama de caja de vacunas perdidas anualmente (Escenario A). La caja morada contiene el 50 % central de las simulaciones, con la línea horizontal verde marcando la mediana. Se observa una caja muy estrecha, pero con una inmensa cantidad de puntos negros por encima del bigote superior; estos representan los años atípicamente catastróficos que arrastran el promedio poblacional hacia arriba.

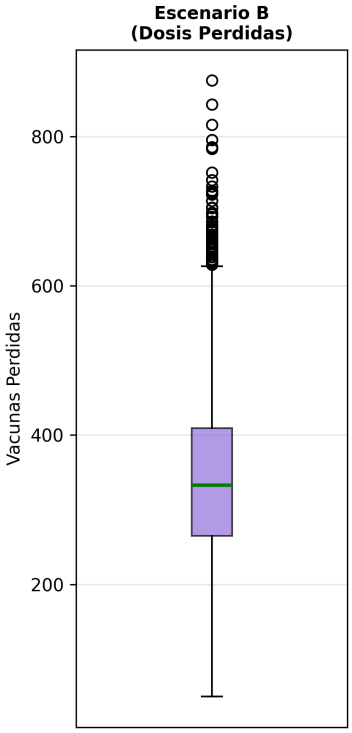


Figura 8.25.: Diagrama de caja de vacunas perdidas anualmente (Escenario B). La caja se eleva y se ensancha verticalmente, reflejando un aumento tanto en la mediana como en la varianza general del sistema. Los valores atípicos siguen concentrados exclusivamente en la cola superior, alcanzando escenarios de riesgo con casi 900 dosis perdidas.

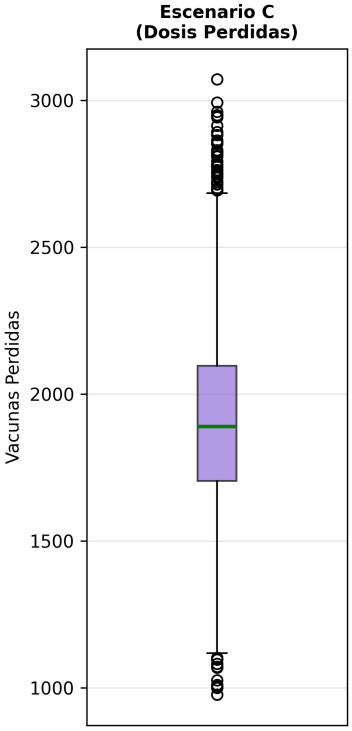


Figura 8.26.: Diagrama de caja de vacunas perdidas anualmente (Escenario C). La caja se posiciona en un nivel de destrucción extremo. A diferencia de los escenarios anteriores, el aumento masivo de la varianza provoca que aparezcan valores atípicos tanto en la cola superior (superando las 3000 dosis) como en la inferior (cayendo a 1000 dosis), confirmando la forma de campana observada en su histograma.

El análisis de los diagramas de caja confirma la asimetría del riesgo termodinámico. En el Escenario A, el rango intercuartílico (la altura de la caja morada) es sumamente pequeño, indicando que en la mayoría de los años las pérdidas son mínimas y muy similares entre sí. Sin embargo, hay una alta cantidad de valores atípicos extremos: años donde apagones severos rompen la inercia térmica y disparan las pérdidas muy por encima del comportamiento normal.

Conforme se introduce la interacción humana (Escenario B y C), el tamaño de la caja crece significativamente, demostrando que las aperturas de puerta inyectan una enorme varianza e incertidumbre al sistema. Esta evidencia visual (cajas asimétricas y colas pesadas de valores atípicos) indica fuertemente que los datos de las mermas no provienen de una distribución Normal. Para justificar el uso de estadística inferencial avanzada, es necesario comprobar esta falta de normalidad mediante una prueba de bondad de ajuste.

8.7.6. Análisis de Distribuciones y Prueba de Normalidad

En el cálculo estocástico comprender la forma de las distribuciones resultantes es tan importante como conocer sus promedios. Las representaciones visuales anteriores (histogramas y diagramas de caja) sugieren una fuerte asimetría en los datos; sin embargo, en la estadística, la forma visual debe comprobarse mediante una prueba de bondad de ajuste paramétrica.

Para ello, se aplicó la **Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk** a las métricas operativas obtenidas de las 5000 simulaciones de Monte Carlo. Este test evalúa estadísticamente la hipótesis nula (H_0) de que los datos provienen de una distribución Normal. Siguiendo la metodología estándar para pruebas de bondad de ajuste (Montgomery y Runger 2014), la regla de decisión se basa en comparar el nivel de significancia ($\alpha = 0.05$) contra el valor-p obtenido:

- Si el **Valor-p** < 0.05, se rechaza H_0, concluyendo que la distribución es asimétrica, posee colas pesadas y su varianza está dominada por eventos extremos.
- Si el **Valor-p** > 0.05, no se rechaza H_0, confirmando que los datos provienen de una distribución Normal.

A continuación, se presenta la tabla comparativa con los Valores-p obtenidos para las métricas críticas de la red de frío en los tres escenarios operativos.:

Tabla 8.3.: Prueba de Normalidad de Shapiro-Wilk aplicada a las métricas críticas de la red de frío.

Métrica	Escenario A (Valor-p)	Escenario B (Valor-p)	Escenario C (Valor-p)	¿Distribución Normal?
Riesgo Termodinámico				
Eventos $T(t) > 8°C$	7.35×10^{-27}	6.09×10^{-12}	4.91×10^{-2}	No (Se rechaza H_0)
Eventos $T(t) < 2°C$	1.18×10^{-26}	1.82×10^{-36}	2.97×10^{-41}	No (Se rechaza H_0)
Tiempo Fuera de Rango Normativo	2.44×10^{-30}	1.90×10^{-18}	2.48×10^{-4}	No (Se rechaza H_0)
Impacto Logístico (Mermas)				
Vacunas Perdidas (Volumen)	1.74×10^{-48}	1.93×10^{-24}	3.45×10^{-8}	No (Se rechaza H_0)
Pérdida Relativa (%)	1.74×10^{-48}	1.57×10^{-24}	4.51×10^{-6}	No (Se rechaza H_0)

Interpretación del Test de Normalidad:

Los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk confirman que **el riesgo en la red de frío no sigue una distribución Normal.** En el Escenario A (Línea Base), el Valor-p para las vacunas perdidas es extremadamente cercano a cero (1.74×10^{-48}), lo que implica un rechazo absoluto de la normalidad. Esto comprueba de manera irrefutable que el aislamiento pasivo del equipo depende por completo de eventos raros en la cola de la distribución (los apagones catastróficos aleatorios).

No obstante, al analizar la evolución de los Valores-p hacia la derecha de la tabla, se observa un fenómeno estadístico interesante debido al **Teorema del Límite Central**. Conforme aumenta el estrés logístico debido a la saturación de aperturas de puerta, los Valores-p se hacen cada vez más grandes. En el Escenario C (Contingencia), el Valor-p de las pérdidas relativas asciende hasta 4.51×10^{-6}; y en el caso de las rupturas de la cadena de frío por encima de los 8°C, el Valor-p (0.0491) estuvo a milésimas de cruzar el umbral del 0.05.

Esta evolución demuestra que la alta frecuencia de variables aleatorias (casi 1000 resurtidos anuales) empuja la geometría del riesgo hacia la normalidad. Bajo un estrés operativo

masivo, el colapso del sistema deja de ser un "evento raro e impredecible" en la cola de la distribución para convertirse en un comportamiento constante, determinista y centrado.

A pesar de esto, el rechazo de la hipótesis nula (H_0) en todas las métricas de pérdida de dosis exige descartar por completo el uso de estadística inferencial clásica paramétrica (como la desviación estándar tradicional o los intervalos Z). Por ello, para calcular el riesgo real y el intervalo de predicción final, es necesario recurrir a métodos de estadística no paramétrica.

8.8. Inferencia Estadística No Paramétrica (Método Bootstrap)

Debido a que la prueba de Shapiro-Wilk rechazó la normalidad de las distribuciones de riesgo (las cuales presentan una fuerte asimetría y colas pesadas provocadas por apagones extremos), el uso de la estadística inferencial clásica resulta incorrecto y sesgaría los resultados.

Para resolver este problema de forma rigurosa, se implementó el método inferencial no paramétrico de **Bootstrap** (Efron y Tibshirani 1993). El funcionamiento de este algoritmo consiste en realizar un remuestreo masivo: se extraen aleatoriamente (con reemplazo) 10000 nuevas muestras de tamaño $n = 5000$ a partir de los 5000 años originales generados en la Simulación de Monte Carlo. Al calcular el promedio de cada una de estas 10000 nuevas muestras, la interacción de dos propiedades estadísticas fundamentales estabiliza el sistema: por un lado, la **Ley de los Grandes Números** garantiza que, dado el tamaño sustancial de la muestra, la varianza del estimador colapse drásticamente, asegurando que las medias se agrupen con extrema precisión alrededor de la verdadera media poblacional; por otro lado, el **Teorema del Límite Central** asegura que, sobre esta varianza residual, la distribución de dichas medias adoptará la forma de una distribución Normal $N(\mu, \sigma^2/n)$, independientemente de la fuerte asimetría y las colas pesadas de los datos originales. Esto permite aislar el ruido de los años atípicamente catastróficos y calcular un **Intervalo de Confianza (IC) al 95 %**, proporcionando una estimación robusta sobre los rangos en los que operará el centro de almacenamiento de vacunas.

A continuación, se presenta la tabla resumen con los promedios esperados, seguida del desglose detallado con los intervalos de confianza del 95 % para cada escenario operativo.

Tabla 8.4.: Estadísticas de riesgo: Promedio anual esperado aplicando el Método Bootstrap para los tres escenarios operativos.

Métrica	Escenario A (Línea Base)	Escenario B (Apego Normativo)	Escenario C (Contingencia)
Perturbaciones Externas			
Apagones	64.3	64.3	64.3

Métrica	Escenario A (Línea Base)	Escenario B (Apego Normativo)	Escenario C (Contingencia)
Aperturas de Puerta	0	499	998
Riesgo Termodinámico			
$T(t) > 8°C$	26.4 eventos	134.6 eventos	419.7 eventos
$T(t) < 2°C$	25.2 eventos	12.5 eventos	9.0 eventos
$T(t) < 0°C$	0.01 eventos	0.00 eventos	0.00 eventos
Tiempo Fuera de Rango Normativo	24.4 horas (0.28 %)	95.6 horas (1.09 %)	420.6 horas (4.79 %)
Impacto Logístico (Mermas)			
Dosis Perdidas (Volumen)	61 dosis	343 dosis	1905 dosis
Pérdida Relativa (%)	1.21 %	1.36 %	2.57 %

8.8.1. Análisis Inferencial de Riesgo (Intervalos al 95 %)

Escenario A (Línea Base):

Bajo un régimen de aislamiento absoluto (cero aperturas), el método Bootstrap redujo drásticamente la incertidumbre. Se estima un promedio de 26.4 rupturas de la cadena de frío por encima de los 8°C, acumulando 12.6 horas (0.14 % del año) con un IC del 95 % de [12.4 h (0.14 %), 12.8 h (0.15 %)]. Las rupturas por debajo de los 2°C promedian 25.2 eventos, acumulando 11.8 horas (0.13 % del año) con un IC del 95 % de [11.7 h (0.13 %), 12.0 h (0.14 %)]. El primer evento crítico de falla ocurre en promedio en el Día 38, con un IC del 95 % extremadamente acotado entre el Día 37 y el Día 39. En cuanto a la congelación ($T(t) < 0°C$), el biológico sufrió daños únicamente en 23 de los 5000 años simulados (0.46 %), promediando un tiempo acumulado de 0.0 horas (0.0 %) con un primer registro en el Día 195. En el ámbito logístico, el equipo operó un total de 24.4 horas (0.28 % del año) fuera del rango normativo con un IC del 95 % de [24.1 h (0.27 %), 24.7 h (0.28 %)], lo que genera una pérdida promedio de 61 dosis (1.21 % de pérdida relativa) altamente acotada dentro de un IC del 95 % de [59, 62] dosis.

Escenario B (Apego Normativo):

Al estabilizar los datos con la interacción humana normada, se estima un promedio de 134.6 rupturas de la cadena de frío por encima de los 8°C, acumulando 90.0 horas (1.02 % del año) con un IC del 95 % de [89.4 h (1.02 %), 90.6 h (1.03 %)]. Las rupturas por debajo

de los 2°C promedian 12.5 eventos, acumulando 5.6 horas (0.06 % del año) con un IC del 95 % de [5.5 h (0.06 %), 5.7 h (0.07 %)]. El primer evento crítico de falla se adelanta al Día 8, con un IC del 95 % entre el Día 8 y el Día 9. El riesgo de congelación ($T(t) < 0$°C) afectó solo a 9 de los 5000 años simulados (0.18 %), promediando 0.0 horas (0.0 %) con un primer registro en el Día 187. En el ámbito logístico, el equipo operó un total de 95.6 horas (1.09 % del año) fuera del rango normativo con un IC del 95 % de [95.0 h (1.08 %), 96.2 h (1.10 %)], resultando en una pérdida promedio de 343 dosis (1.36 % de pérdida relativa), limitando estadísticamente el daño real esperado dentro de un IC del 95 % de [340, 346] dosis.

Escenario C (Contingencia):

Bajo el régimen de estrés masivo, se estima un promedio de 419.7 rupturas de la cadena de frío por encima de los 8°C, acumulando un valor crítico de 416.5 horas (4.74 % del año) con un IC del 95 % de [415.1 h (4.73 %), 417.9 h (4.76 %)]. Las rupturas por debajo de los 2°C se reducen a un promedio de 9.0 eventos, acumulando 4.1 horas (0.05 % del año) con un IC del 95 % de [4.0 h (0.05 %), 4.2 h (0.05 %)]. El colapso del sistema es inminente, presentándose el primer evento crítico en el Día 3, con un IC del 95 % exacto en el Día 3. El riesgo de congelación ($T(t) < 0$°C) fue prácticamente nula, ocurriendo en apenas 7 de los 5000 años simulados (0.14 %), promediando 0.0 horas (0.0 %) con un primer registro en el Día 210. En el impacto logístico global, el equipo operó 420.6 horas (4.79 % del año) fuera del rango normativo con un IC del 95 % de [419.1 h (4.77 %), 422.0 h (4.80 %)], provocando una pérdida masiva promedio de 1,905 dosis (2.57 % de pérdida relativa), con un margen de daño acotado dentro de un IC del 95 % de [1896, 1913] dosis.

Interpretación Inferencial Conjunta:

La aplicación del método Bootstrap revela el verdadero poder de la inferencia estadística sobre sistemas caóticos como este. Antes de este análisis, los datos descriptivos empíricos del Escenario A mostraban una volatilidad engañosa (sugiriendo que la pérdida podía ir desde 2 hasta 179 dosis). Sin embargo, el remuestreo de las medias colapsó esa incertidumbre, demostrando que la verdadera pérdida poblacional esperada para el equipo Haier HBC-150 sin aperturas de puerta es de apenas 59 a 62 dosis anuales con una confianza del 95 %.

Al comparar los tres intervalos de confianza estabilizados, la tendencia de riesgo queda demostrada con rigor absoluto. El paso de una operación pasiva (Escenario A) al apego normativo (Escenario B) quintuplica el daño poblacional real, pasando de 61 a 343 dosis pérdidas. Finalmente, la contingencia logística (Escenario C) destruye cualquier margen de salvación termodinámica: el intervalo de confianza [1896, 1913] comprueba que, bajo una saturación de resurtidos, el colapso de la red de frío es inevitable, ya que con una confianza del 95 % se perdera al menos el 2.56 % de los biológicos administrados por el centro de salud en Tuxtla Gutiérrez, independientemente del clima o las fallas eléctricas en ese año específico.

8.8.2. Validación Visual de la Inferencia

Para comprobar visualmente la eficacia del método no paramétrico y garantizar que el Teorema del Límite Central y la Ley de los Grandes Números actuaran correctamente sobre el ruido del sistema, se graficaron las distribuciones normalizadas obtenidas a partir de las 10000 medias muestrales de remuestreo para cada escenario.

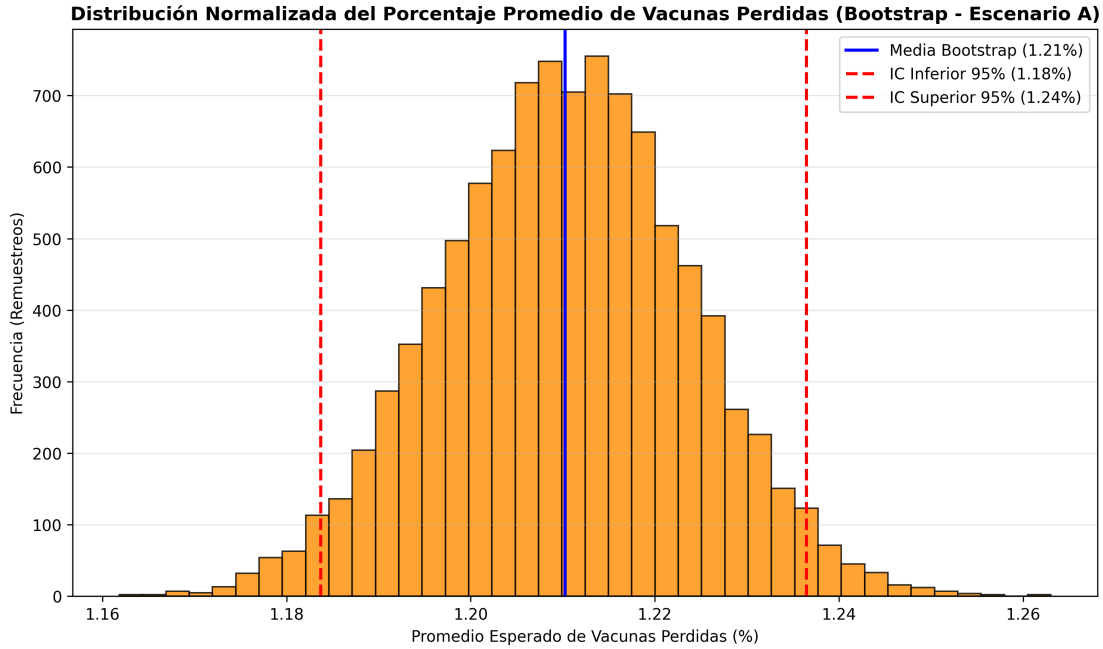


Figura 8.27.: Distribución normalizada del porcentaje de pérdida (Escenario A). El eje horizontal representa el promedio esperado del porcentaje de vacunas perdidas, mientras que el eje vertical contabiliza la frecuencia de las 10000 medias de remuestreo. La línea azul indica la Media Bootstrap poblacional (1.21 %), y las líneas rojas punteadas delimitan los límites exactos del Intervalo de Confianza Inferior (1.18 %) y Superior (1.24 %) al 95 %. La distribución ha perdido por completo su asimetría original, adoptando la forma de una campana de Gauss.

Interpretación de la Estabilización:

Al observar los histogramas de medias de Bootstrap, se comprueba que la asimetría positiva y las colas pesadas de valores atípicos (visibles en los análisis empíricos previos) han sido completamente eliminadas. En los tres escenarios, independientemente de la alta dispersión original generada por los apagones extremos o la saturación clínica, el método logró converger el estimador hacia una distribución Normal.

Este nivel de estabilización permite concluir que los Intervalos de Confianza al 95 % calculados son confiables. Gracias a la Simulación de Monte Carlo y al remuestreo

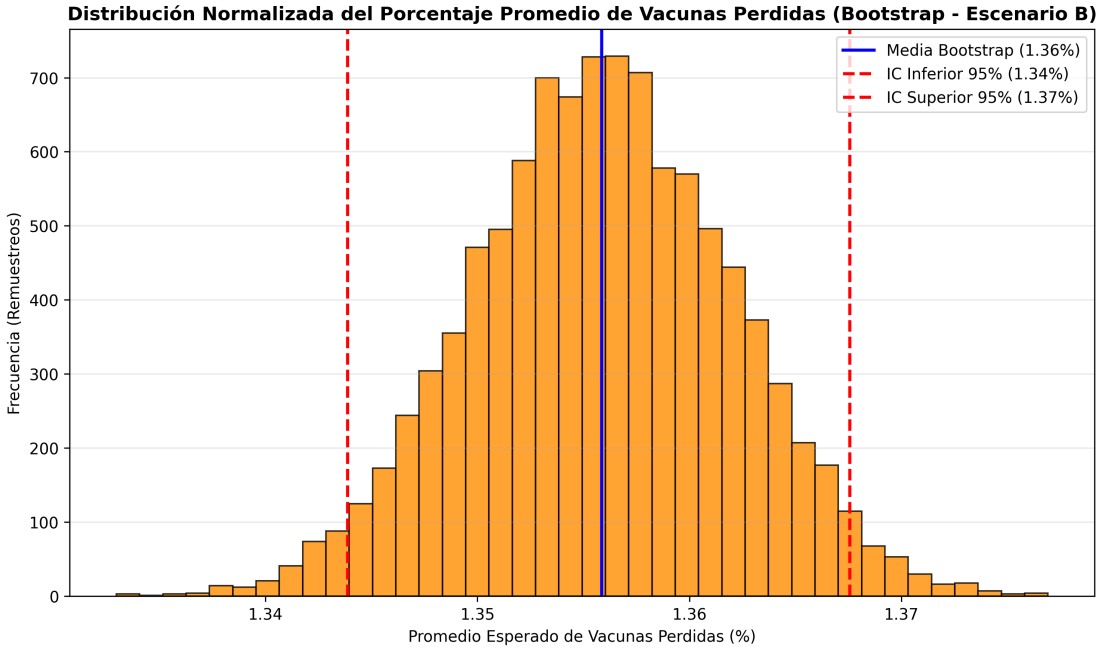


Figura 8.28.: Distribución normalizada del porcentaje de pérdida (Escenario B). La distribución de medias converge a una campana simétrica centrada en una pérdida poblacional del 1.36 %, con un intervalo de confianza del 95 % reducido que va del 1.34 % al 1.37 %.

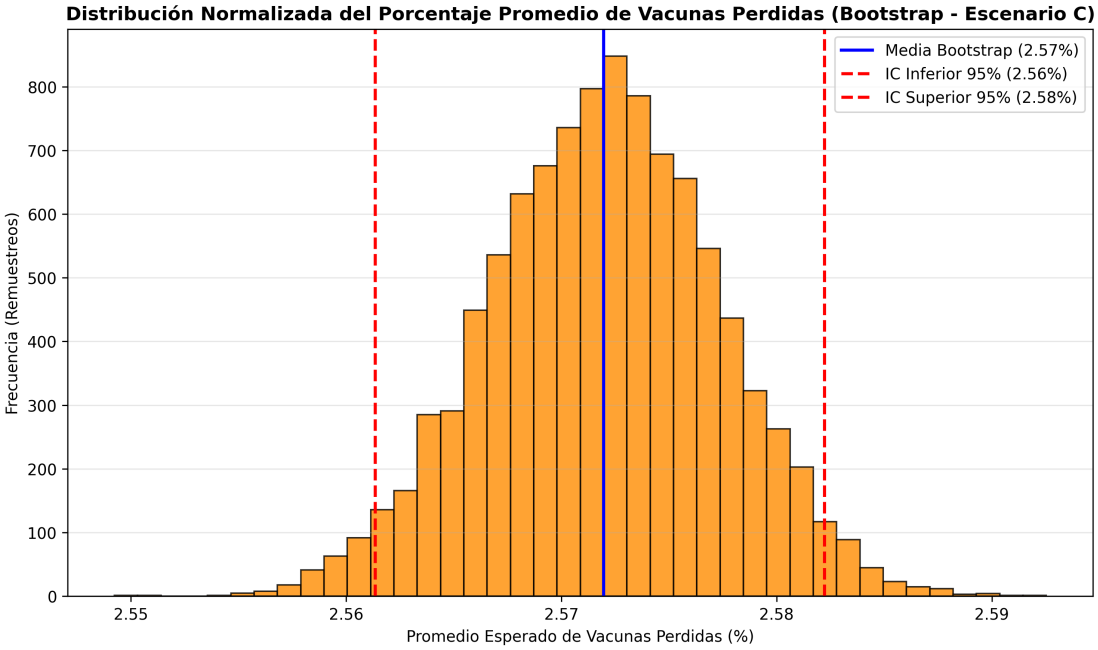


Figura 8.29.: Distribución normalizada del porcentaje de pérdida (Escenario C). La campana se establece en el nivel más crítico del análisis, confirmando con absoluta precisión que la pérdida poblacional esperada es del 2.57 %, acotada estrictamente entre el 2.56 % y el 2.58 % con una confianza del 95 %.

masivo de Bootstrap, la aleatoriedad climática y eléctrica del estado de Chiapas ha sido controlada, logrando transformar la incertidumbre de la red de frío institucional en una predicción de riesgo determinista.

8.8.3. Precisión del Estimador (Dispersión de Medias Bootstrap)

Para ilustrar la reducción de la incertidumbre lograda por la inferencia no paramétrica, se construyeron diagramas de caja (*boxplots*) aplicados exclusivamente a las 10000 medias muestrales obtenidas mediante el método Bootstrap para la métrica de dosis perdidas.

Interpretación de la Dispersión:

La visualización de los diagramas de caja aplicados a las medias muestrales demuestra visualmente la robustez del método Bootstrap. Al comparar estas figuras con los diagramas empíricos originales, el contraste es absoluto: mientras que la estadística descriptiva inicial mostraba una varianza gigantesca y colas pesadas llenas de años atípicamente destructivos, el remuestreo logró disminuir esa varianza. Los *boxplots* naranjas demuestran que, al evaluar el riesgo a nivel poblacional y no a nivel de un año al azar, la incertidumbre desaparece, permitiendo estimar el daño con un margen de error de apenas unas cuantas dosis.

8.9. Conclusión de la Simulación y Análisis de Riesgo

La integración del modelado estocástico (Ecuaciones Diferenciales Estocásticas) con el análisis inferencial masivo (Monte Carlo y Bootstrap) ha permitido medir de manera rigurosa el verdadero nivel de riesgo operativo que enfrenta la red de frío en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

El análisis demuestra que el aislamiento térmico del equipo Haier HBC-150 y las fallas eléctricas, por sí solos, no representan una amenaza sistemática para la viabilidad de las vacunas (Escenario A). La verdadera causa del colapso térmico es la interacción humana. El apego normativo (Escenario B) expone la fragilidad de la cadena de frío al demostrar que el simple acto de extraer dosis de manera controlada quintuplica las pérdidas poblacionales. Peor aún, bajo condiciones de contingencia y saturación logística (Escenario C), el sistema pierde toda capacidad de recuperación térmica, transformando las rupturas de la cadena de frío en una destrucción exponencial, continua y estadísticamente inevitable.

Esta evidencia matemática confirma que la preservación de los biológicos no depende únicamente de la modernización de la infraestructura eléctrica o del aislamiento pasivo de los equipos, sino que depende mayormente de los protocolos logísticos de resurtido y el manejo del inventario en las unidades de salud.

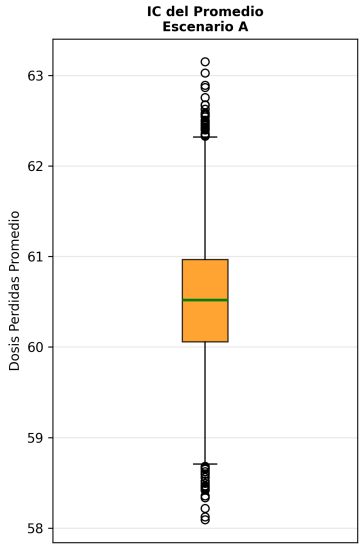


Figura 8.30.: Diagrama de caja de la media poblacional (Escenario A). La caja naranja representa el 50 % central del estimador, con la línea verde indicando la verdadera media poblacional. A diferencia del diagrama de caja empírico Figura 8.24 (que mostraba datos atípicos de hasta mas de 300 dosis), la varianza del estimador se ha reducido significativamente; el rango total de las medias fluctúa solamente entre 58 y 63 dosis.

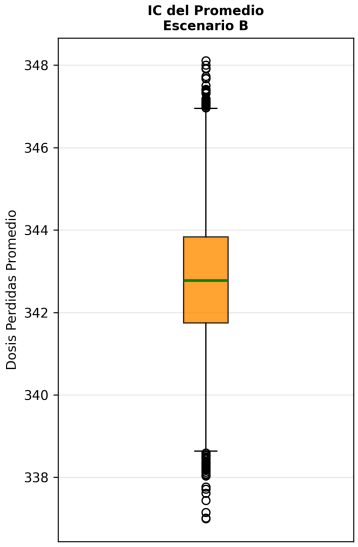


Figura 8.31.: Diagrama de caja de la media poblacional (Escenario B). El estimador se estabiliza con una precisión milimétrica. La media poblacional esperada se concentra alrededor de las 343 dosis, con una fluctuación máxima contenida en un rango absoluto de apenas 10 dosis (de 338 a 348).

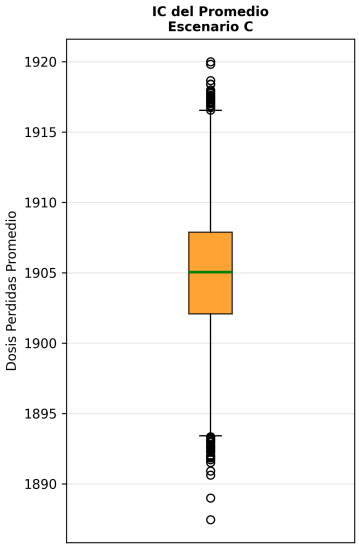


Figura 8.32.: Diagrama de caja de la media poblacional (Escenario C). A pesar del colapso logístico del sistema, el Teorema del Límite Central y la Ley de los Grandes Números garantizan la precisión del estimador. La media poblacional se aísla de las trayectorias catastróficas individuales y se fija en 1905 dosis, con un margen de dispersión de 1890 a 1920 dosis.

9. Conclusiones y Trabajo Futuro

El desarrollo de este trabajo de tesis permitió formular, calibrar y simular un modelo termodinámico basado en ecuaciones diferenciales estocásticas híbridas, acoplado a la cinética de degradación de Arrhenius y a la dinámica de inventario, para cuantificar el riesgo operativo y la pérdida de vacunas en la cadena de frío de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, cumpliendo con el **objetivo general** planteado en esta tesis. A través de la integración del cálculo estocástico, los métodos numéricos para EDES, la cinética de degradación química y la inferencia estadística no paramétrica, fue posible evaluar con rigor el impacto real que tienen el clima extremo, las fallas eléctricas y la interacción humana sobre la viabilidad de los productos biológicos.

En cuanto a los fundamentos teóricos matemáticos (Capítulo 4), y cumpliendo así con parte del **primer objetivo específico**, se demostró que la evolución de la temperatura interna de un refrigerador clínico sujeto a perturbaciones continuas y discretas descrita mediante la ecuación diferencial estocástica híbrida de Ornstein-Uhlenbeck propuesta (Ecuación 4.9.1), la cual acopla una cadena de Markov a tiempo continuo $\{\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ (Definición 4.11) para el suministro eléctrico con un proceso de Poisson compuesto $J(t)$ (Definición 4.10) para las aperturas de puerta tiene una única solución fuerte global acotada en media cuadrática (Teorema 4.9 y Sección 4.10).

Respecto a los métodos numéricos (Capítulo 5) bajo los criterios de convergencia fuerte (Definición 5.1) y débil (Definición 5.2), la diferencia entre los esquemas de Euler-Maruyama (alg. 5.1) y de Milstein (alg. 5.2 y Figura 5.1) permitió concluir una propiedad estructural clave para nuestro modelo: al ser la volatilidad térmica constante dentro de cada régimen ($\partial_T \sigma = 0$), el término integral doble de Milstein (Ecuación 5.3.1) se anula, haciendo que ambos métodos coincidan en su parte difusiva. Integrando la discretización de la cadena de Markov (Sección 5.5) con el esquema regular de saltos en malla fija (Sección 5.6 y Ecuación 5.6.2), el alg. 5.3 garantizó un orden de convergencia fuerte $\gamma = 0.5$ ideal para acoplarse con series climáticas en pasos constantes ($\Delta t = 5/60$ h).

Asimismo, los fundamentos epidemiológicos (Capítulo 6) permitieron vincular esta dinámica térmica con la cinética de degradación de primer orden (Ecuación 6.2.1) y la Ecuación de Arrhenius (Definición 6.1 y Ecuación 6.2.2), estableciendo mediante el balance dinámico de inventario (Sección 6.3, Ecuación 6.2.3 y Ecuación 6.3.1) que la pérdida física de dosis es directamente proporcional al volumen de vacunas almacenado en el instante en el que se rompe la cadena de frío, completando así el acoplamiento teórico planteado en el **primer objetivo específico**.

Por su parte, el estudio de caso y la calibración de los parámetros (Capítulo 7) permitió parametrizar los componentes físicos, eléctricos, cinéticos y logísticos del modelo sobre un escenario operativo real a partir de registros oficiales y de las leyes físicas. Combinando los datos históricos de la CFE (Tabla 7.1) con la sectorización de subestaciones del CENACE (Secretaría de Energía 2024) (Sección 7.3), se estimó una frecuencia local de 64 apagones anuales (Ecuación 7.3.1). El desglose marginal de los índices SAIFI y SAIDI (Tabla 7.2 y Tabla 7.3) permitió calibrar la función de intensidad $\lambda_{cfe}(t)$ del Proceso de Poisson No Homogéneo (Sección 7.5, Ecuación 7.5.2 y Figura 7.1) y las distribuciones Log-Normales estacionales de la duración de los cortes de energía eléctrica (Tabla 7.6), identificando a la temporada de calor como la de mayor duración promedio por apagón (2.983 h, Figura 7.3) frente al invierno y las lluvias (Figura 7.2 y Figura 7.4). A su vez, las características físicas del refrigerador Haier HBC-150 (Organización Mundial de la Salud 2024) (Figura 7.5 y Ecuación 7.9.1) reveló una marcada asimetría entre la rápida tasa de enfriamiento activo ($\kappa_{on} \approx 0.1154$ h^{-1}, $\sigma_{on} \approx 0.4804$) y la lenta pérdida pasiva provista por su revestimiento de hielo ($\kappa_{off} \approx 0.00232$ h^{-1}, $\sigma_{off} \approx 0.048$), la cual se integró con los saltos térmicos normales truncados basados del NIST (Chojnacky et al. 2010) ($\gamma_i \sim \text{máx}(0.16, \mathcal{N}(0.76, 0.20^2))$ Ecuación 7.9.2), los parámetros cinéticos de Arrhenius (Sección 7.10 y Ecuación 7.10.1) y la demanda estacional clínica (Sección 7.11 y Tabla 7.7), cumpliendo así con el **segundo objetivo específico**.

Finalmente, respecto a la simulación computacional (Capítulo 8), se implementó en Python el esquema numérico híbrido de Euler-Maruyama (alg. 8.1) (Pérez, C. 2026a, 2026b, 2026c) integrando recursivamente la temperatura interna bajo el ciclo climático de Tuxtla Gutiérrez (Figura 8.1 y Figura 8.2), el filtro de inercia térmica de 30 minutos de los viales y las reglas de reabastecimiento en los tres contextos operativos, cumpliendo así con el **tercer objetivo específico**. De manera conjunta, cumpliendo con el **cuarto objetivo específico**, se cuantificó el riesgo termodinámico y la merma anual de biológicos mediante $M = 5000$ simulaciones de Monte Carlo y 10000 remuestreos Bootstrap, arrojando las siguientes conclusiones principales sobre la cadena de frío:

- **Alta resistencia del aislamiento pasivo (Escenario A):** En ausencia de aperturas de puerta (Figura 8.3 y Figura 8.6), la inercia térmica del equipo Haier HBC-150 soporta eficazmente los 64.3 apagones anuales y el clima cálido exterior, manteniendo una mediana de pérdida mensual igual a cero durante todo el año (Figura 8.16) y nulo riesgo de congelación. El método de Bootstrap (Tabla 8.4, Figura 8.27 y Figura 8.30) demostró que la merma poblacional esperada es de apenas **61 dosis anuales (1.21 %)** con un intervalo de confianza al 95 % de $[59, 62]$ dosis ($[1.18\,\%, 1.24\,\%]$), originada únicamente por apagones extremos aislados (Figura 8.9, Figura 8.12, Figura 8.21 y Figura 8.24).
- **Incremento del riesgo por operación estándar (Escenario B):** La introducción de 499 aperturas anuales normadas (Figura 8.4, Figura 8.7 y Figura 8.10) quintuplica las rupturas de la cadena de frío superiores a 8°C (alcanzando 134.6 eventos y 95.6 horas fuera de rango normativo al año, Tabla 8.2). Aunque en años particulares la rotación del inventario elimina el daño al consumir dosis antes de los apagones

(Sección 8.4.2), a largo plazo el ingreso de calor por aperturas domina el sistema, elevando la pérdida poblacional esperada a **343 dosis anuales (1.36 %)** con un IC al 95 % de [340, 346] dosis ([1.34 %, 1.37 %], Figura 8.13, Figura 8.22, Figura 8.28 y Figura 8.31), concentrando la vulnerabilidad en enero y agosto (Figura 8.17 y Figura 8.18).

- **Colapso exponencial por contingencia epidemiológica (Escenario C):** Al duplicar la actividad a 998 aperturas anuales por viajes matutinos de resurtido (Figura 8.5, Figura 8.8 y Figura 8.11), el equipo pierde su capacidad de recuperación térmica, acumulando 420.6 horas anuales fuera del rango normativo y adelantando la primera falla crítica al Día 3. Las pérdidas no crecen de forma lineal sino exponencial, multiplicándose por más de cinco veces hasta alcanzar **1,905 dosis destruidas por año (2.57 %)** con un IC al 95 % de [1896, 1913] dosis ([2.56 %, 2.58 %], Tabla 8.4, Figura 8.29 y Figura 8.32), produciendo un daño continuo durante todo el año sin importar la estación climática (Figura 8.14, Figura 8.19, Figura 8.20, Figura 8.23 y Figura 8.26).
- **Falta de normalidad y validación del método Bootstrap:** La prueba de Shapiro-Wilk (Tabla 8.3) rechazó la normalidad ($p < 0.05$) en todas las métricas evaluadas, confirmando distribuciones fuertemente asimétricas y de colas pesadas hacia la derecha en los escenarios A y B (Figura 8.21 y Figura 8.22), y una transición hacia la simetría en el Escenario C (Figura 8.23) ante la alta frecuencia de aperturas, lo cual justifica el uso de la estadística no paramétrica.

En resumen, el hallazgo principal para la salud pública es que **el destructor principal de las vacunas en Tuxtla Gutiérrez no es el suministro eléctrico de la CFE ni el aislamiento del equipo, sino el estrés térmico producido por la frecuencia de aperturas de puerta**. Por ello, adquirir plantas eléctricas será insuficiente si no se modifican los protocolos logísticos clínicos. Con base en estos resultados y completando la parte final del **cuarto objetivo específico**, se emiten cuatro recomendaciones operativas para las unidades de salud pública y la Secretaría de Salud:

1. **Ampliación de la capacidad de termos auxiliares para eliminar resurtidos:** Dado que el aumentio de pérdidas de 343 a 1,905 dosis proviene de los viajes matutinos de resurtido ($\lambda_{resurtido} = 0.4\ \mathrm{h}^{-1}$), se recomienda proveer a las clínicas termos auxiliares de mayor volumen (de 9 a 45 litros) para extraer todas las dosis del turno en **una sola apertura a las 08:00 horas**, manteniendo al equipo principal siempre bajo el régimen seguro del Escenario B.
2. **Separación entre almacenamiento de reserva y dispensado diario:** Para evitar exponer simultáneamente todas las dosis a los choques térmicos de apertura (Ecuación 6.3.1), se sugiere mantener el refrigerador tipo cofre como **reserva pasiva sellada** (operando como en el Escenario A, abriéndose solo una vez por semana) y utilizar un refrigerador secundario pequeño exclusivamente para el consumo diario.
3. **Bloqueo de aperturas en apagones y uso de balasto térmico:** Se recomienda instalar indicadores luminosos de línea eléctrica y alarmas que aseguren el cumplimiento estricto de no abrir el equipo durante cortes de luz ($S_n = 0 \implies \Delta J_n = 0$),

además de mantener botellas de agua en la parte superior para acotar el choque térmico hacia el mínimo físico de 0.16°C reportado por el NIST (Sección 7.9.4).

4. **Entregas jurisdiccionales fraccionadas en meses críticos:** Debido a que en operación normativa el mayor riesgo ocurre en enero y agosto por la coincidencia de inventario lleno con fallas eléctricas (Figura 8.17 y Figura 8.18), se sugiere dividir los envíos jurisdiccionales en lotes menores durante la temporada de calor y tormentas para reducir el volumen de dosis expuestas.

9.1. Limitaciones del Estudio y Futuros trabajos de investigación

Aunque el modelo desarrollado ofrece una metodología sólida y reproducible, sus supuestos abren tres líneas claras de investigación futura:

En primer lugar, dado que los parámetros físicos ($\kappa_{on}, \kappa_{off}, \sigma_{on}, \sigma_{off}$) y las magnitudes de los choques térmicos (γ_i) se calibraron a partir de reportes técnicos de la OMS (Organización Mundial de la Salud 2024) y del NIST (Chojnacky et al. 2010), el paso inmediato consiste en **instrumentar un refrigerador institucional en una clínica de Tuxtla Gutiérrez mediante termómetros digitales con registro continuo (*data loggers*) en aire y en viales con glicerol, sensores magnéticos de apertura y medidores de voltaje**. Obtener estas series de tiempo reales minuto a minuto permitirá estimar con mayor precisión los parámetros de la EDE mediante máxima verosimilitud o inferencia Bayesiana, medir la distribución empírica de las aperturas del personal médico y acoplar una segunda ecuación diferencial estocástica para la temperatura interna del vial $T_{vial}(t)$ que reemplace el filtro discreto de inercia térmica de 30 minutos.

En segundo lugar, mientras que en este trabajo las tasas de transferencia térmica se asumieron constantes, en la realidad la masa térmica interna varía conforme el inventario $I(t)$ fluctúa entre $1,000$ y $5,000$ dosis. Como trabajo futuro se propone formular tasas variables $\kappa_{on}(I(t))$ y $\kappa_{off}(I(t))$ dependientes de la fracción de llenado e incorporar el calor latente de fusión del revestimiento de hielo durante apagones extremos, generando una ecuación diferencial estocástica no lineal acoplada con el inventario.

Finalmente, dado que en contingencias sanitarias las aperturas de puerta suelen agruparse en ráfagas correlacionadas, se plantea sustituir el Proceso de Poisson No Homogéneo por un **proceso puntual autoexcitado de Hawkes**, donde cada apertura incremente temporalmente la probabilidad de eventos subsecuentes. Asimismo, acoplar directamente nuestra EDE termodinámica (Ecuación 4.9.1) dentro de un problema de **control óptimo estocástico con dinámica epidemiológica SEIR** (García, Díaz-Infante, y Minjárez-Sosa 2025, 2026) permitirá calcular políticas óptimas de reabastecimiento que minimicen de manera conjunta el costo por merma térmica y el impacto epidemiológico por desabasto.

Referencias

Arnold, Ludwig. 1974. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Asmussen, Søren. 2003. «Applied Probability and Queues». En, 2nd ed., 51:39-59. Stochastic Modelling y Applied Probability. New York, NY: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/0-387-21525-5_2.

Atkins, Peter, Julio de Paula, y James Keeler. 2018. *Atkins' Physical Chemistry*. 11.ª ed. Oxford: Oxford University Press.

Billinton, Roy, y Ronald N. Allan. 1996. *Reliability Evaluation of Power Systems*. 2.ª ed. Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1860-4.

Brown, Richard E., y John McDonald. 2007. *Electric Power Substations Engineering*. 2.ª ed. Boca Raton, FL: CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781420007312.

Chojnacky, Michal, Wyatt Miller, Dean Ripple, y Gregory Strouse. 2010. «Thermal Analysis of Refrigeration Systems Used for Vaccine Storage». NIST Interagency/Internal Report (NISTIR), n.º 8128.

Comisión Federal de Electricidad. 2024. «Informe Anual 2024». Ciudad de México: Gobierno de México.

Costanzo, Giuseppe Tommaso, Fabrizio Sossan, Mattia Marinelli, Peder Bacher, y Henrik Madsen. 2013. «Grey-box modeling for system identification of household refrigerators: A step toward smart appliances». En *2013 4th International Youth Conference on Energy (IYCE)*, 1-5. IEEE. https://doi.org/10.1109/IYCE.2013.6604197.

Efron, Bradley, y Robert J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Boca Raton, FL: Chapman; Hall/CRC.

García, Yofre H., Saúl Díaz-Infante, y Jesús A. Minjárez-Sosa. 2025. «An integrated mathematical epidemiology and inventory model for high demand and limited supplies under uncertainty». *Decision Analytics Journal* 14: 100543. https://doi.org/10.1016/j.dajour.2024.100543.

———. 2026. «Stochastic optimal control of vaccine inventory during epidemics: integrating SEIR dynamics with temperature-driven degradation and uncertain replenishment». *Computational and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s40314-025-03498-z.

Giles, Michael B. 2008. «Multilevel Monte Carlo Path Simulation». *Operations Research* 56 (3): 607-17. https://doi.org/10.1287/opre.1070.0496.

Karatzas, Ioannis, y Steven E. Shreve. 1998. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Vol. 113. Graduate Texts en Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2.

Karlin, Samuel, y Howard M. Taylor. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. 3rd ed. San Diego, CA: Academic Press.

Kloeden, Peter E., y Eckhard Platen. 1992. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Vol. 23. Stochastic Modelling y Applied Probability. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Mao, Xuerong, y Chenggui Yuan. 2006. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. London, UK: Imperial College Press.

Montgomery, Douglas C., y George C. Runger. 2014. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 6th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Organización Mundial de la Salud. 2015. «How to monitor temperatures in the vaccine supply chain». WHO/IVB/15.04. Geneva: World Health Organization. https://apps.who.int/iris/handle/10665/183583.

———. 2024. *WHO Immunisation Devices - Performance, Quality & Safety. E003: Refrigerators and freezers*. World Health Organization. https://apps.who.int/immunization_standards/vaccine_quality/pqs_catalogue/index.aspx.

Pérez, C. 2026a. «Simulación y Análisis de Riesgo en la Red de Frío para Vacunas - Escenario A (Línea Base): Código Fuente en Python». https://github.com/Crisperez517/Tesis/blob/dd475b5346eeefe92d64385f7e8993b8f93b66b5/TESIS_Simulaci%C3%B3n_Escenario_A.ipynb.

———. 2026b. «Simulación y Análisis de Riesgo en la Red de Frío para Vacunas - Escenario B (Apego Normativo): Código Fuente en Python». https://github.com/Crisperez517/Tesis/blob/dd475b5346eeefe92d64385f7e8993b8f93b66b5/TESIS_Simulaci%C3%B3n_Escenario_B.ipynb.

———. 2026c. «Simulación y Análisis de Riesgo en la Red de Frío para Vacunas - Escenario C (Contingencia Operativa): Código Fuente en Python». https://github.com/Crisperez517/Tesis/blob/7e75884b587940c35c7aff871382ecb4c2695e9f/TESIS_Simulaci%C3%B3n_Escenario_C.ipynb.

Platen, Eckhard, y Nicola Bruti-Liberati. 2010. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*. Vol. 64. Stochastic Modelling y Applied Probability. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13694-8.

Ross, Sheldon M. 1996. *Stochastic Processes*. 2nd ed. New York, NY: Wiley.

———. 2018. *A First Course in Probability*. 10th ed. Pearson.

Secretaría de Energía. 2024. «Programa para el Desarrollo del Sistema Eléctrico Nacional (PRODESEN) 2024-2038». Ciudad de México: Gobierno de México.

Situ, Rong. 2005. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. New York, NY: Springer.

Vollmer, Michael. 2009. «Newton's law of cooling revisited». *European Journal of Physics* 30 (5): 1063-84. https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/5/014.

Wang, Liguo. 2016. «Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations». PhD Dissertation, The University of Tennessee, Knoxville. https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/3974.

Yin, G. George, y Chao Zhu. 2010. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications*. Vol. 63. Stochastic Modelling y Applied Probability. New York, NY: Springer.

https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1105-6.
Yoshioka, Sumie, y Valentino J. Stella. 2000. *Stability of Drugs and Dosage Forms*. Boston, MA: Springer.